Kümeler Tarihi Küme Nedir Kümeler Tarihçesi

İnternetten Alınmış Hazır Bilgidir 29.12.2009

Matematik dilinde birlik sağlama gereksinimi on dokuzuncu yüzyıl sonlarına doğru duyuldu. Bu işi İlk görenlerin başında Alman matematikçi Georg Cantor gelir. Bu birlik kümelerle sağlanır. Zaten sonlu ve sonsuz kümeleri oluşturmak amacında olan Cantor (1845 -1918) bu amaca ilk ulaşanlardan biriydi. Bernard Bolzano (1851) doğal sayıların ötesinde sayılabilme problemini ortaya koyan sonsuz kümeler üzerine olan İlk çalışmasını yayınladı. 1878 yılında Georg Cantorun küme kavramım ortaya atan ilk çalışması yayınlandı. Frege 1893 yılında Aritmetiğin Temel Yasaları isimli ya¬pıtının İlk cildini yayınladı. Bu eserde Cantorunkine çok yakın bir şekilde küme kavramını ortaya koydu. Sayıların kümeye dayalı tanımını verdi.

1903 yılında Russel paradoksu ilk kez ortaya atıldı. Bu paradoks. Fregenin kitabının ikinci cildinde yer aldı. Çalışmanın konusu, matematiğin kümeler kavramı üzerine kurulmasını olanaksız kılıyordu. Kendisini öğe olarak kabul eden kümelerin kümesi anlamsızdır şeklinde olan bu paradoks her şeyin küme olarak alınamayacağım ortaya koydu. Ernest Zermelo, paradoksal kümelere olanak vermeyen ilk aksiyom sistemim önerdi. Russell ve Whitehead 1910 yılında dikkat çekici olan Matematiğin İlkeleri isim¬li eserlerini yayınladılar. Paradokslardan kaçınmak için tipler kuramı adı altında karmaşık bir yazım önerdiler. Bu teknik bazı bilgisayar dilleri için temel oluşturdu.

Abraham Fraenkel, 1922 yılında Zermelonun aksiyom sistemini geliştirdi. Günümüzde Zermelo - Fraenkel İsmiyle anılan bu sistem yaygın bir kullanım alanı buldu. John Von Neumann 1924 yılında kümeler kuramım aksiyomatik hale getirmek için temel iki kavrama, yani paradoks olabilecek sınıflara ve kümelere dayanan bir çözüm önerdi.

Kurt Gödel 1940 yılında sonlu ötesi sayıların tanımlanmasında zorunlu olan seçme aksiyomu ve bu sayılara tutarlı bir temel hazırlayan süreklilik varsayımının kuramın diğer aksiyomlarıyla çelişmediğini gösterdi. Paul Joseph Cohen 1963 yılında, bu iki önermenin olumsuzunun da kuramın diğer aksiyomlarıyla çelişmediğini gösterdi. Cohenİn süreklilik varsayımı hakkındaki bu sonucu rahatsız edicidir. Nasıl kurulduğu belirtilmeksizin bir doğrunun noktalarının kümesi ve doğal sayıların sayılabilirliği arasında sonsuz büyüklükte keyfi bir sayının sabitleştirilebileceğini işaret eder. Bu konu üzerindeki araştırmalar devam etmektedir.

Kümelerin bu biçimde kurulması sağlandıktan sonra kümelerin dili yazılmıştır. Bu dille kümeler üzerinde; bileşim, kesişim, fark. simetrik fark ve tümleyen gibi tanımlar yapılmış ve bu tanımlarla kümelerin kullanılması sağlanmıştır. Kümeler üzerindeki bağıntılar bu dalın bilgisayarlara nasıl yüklenebileceğini göstermiştir. Bu konudaki İlk çalışmaları George Boole (1815 -1864) yapmıştır ikinci ilk adım da Georg Cantor (1845 -1918) tarafından atılmıştır.

Georg Cantor (1845 - 1918)
Cantor. Almanyada Hallede yaşadı ve dersler verdi. Trigonometrik seriler üzerine olan çalışmaları onu sonlu ötesi adım verdiği sayılan bulma düşüncesine ulaştırdı. Bu sayının amacı doğal sayıların ötesinde işlem kapasitesini araştırmaktı. Bu noktadan hareketle kümelerin dilini oluşturma düşüncesine vardı. Çalışmaları bazı çağdaşlarınca İyi anlaşılamadı ve çok sert tartışmalara yol açtı. Ünlü matematikçi David Hilbertin (1862-1943) dediği gibi "Georg Cantorun bizim için kurduğu cennetten hiç kimse bizi kovamaz!" sözü bugün haklılığını kanıtlamıştır.

Kümelerin sıralanması, sıralama tipleri, kümelerin sayılabilmeleri, kardinal sayılar, sonlu ve sonsuz kümeler, kuvvet kümeleri. Cantor sürekliliği bu alanın başlıca konularıdır. Bu konularla yeni yeni modeller oluşturulabilir. Hatta eski mantığın bugün yeni modellerle matematiksel formüle bağlandığı bir gerçektir.

Bu arada Cantor paradoksunu da yazalım. Buna daha çok yalancı paradoksu denir. Eskiçağdan beri bilinen bu paradoksun ilk ifadesi şu şekilde yapılmıştır; bütün Giritliler yalancıdır. Epimenides de Giritlidir. "Ben yalan söylüyorum" diyor. Daha kısa bir söyleyişle ben bir yalancıyım. Bu halde Epimenides doğruyu söylüyor mu? Hayır. Çünkü kendisi Giritlidir, o halde yalancıdır. Ama "yalan söylüyorum" derken yalan söylüyorsa o zaman doğruyu söylüyor. Bu durumda çelişki kaçınılmazdır

Kümeler Tarihçesi Küme Hakkında bilgi
Matematikte boş küme nedir?

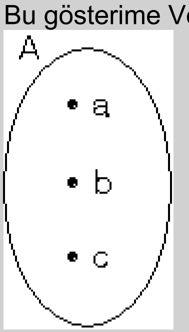
TANIM
Küme, nesnelerin iyi tanımlanmış listesidir.Kümeler genellikle A, B, C gibi büyük harflerle gösterilir.
Kümeyi oluşturan ögelere, kümenin elemanı denir. a elemanı A kümesine ait ise,
a Î A biçiminde yazılır. **"a, A kümesinin elemanıdır."** diye okunur. b elemanı A kümesine ait değilse,
b Ï A biçiminde yazılır. **"b, A kümesinin elemanı değildir."** diye okunur.
Kümede, aynı eleman bir kez yazılır.
Elemanların yerlerinin değiştirilmesi kümeyi değiştirmez.
A kümesinin eleman sayısı s ya da n ile gösterilir.

B. KÜMELERİN GÖSTERİLİŞİ
Kümenin elemanları aşağıdaki 3 yolla gösterilebilir.

1. Liste Yöntemi
Kümenin elemanları { } sembolü içine, her bir elemanın arasına virgül konularak yazılır.
A = {a, b, {a, b, c}} Ş s = 3 tür.

2. Ortak Özellik Yöntemi
Kümenin elemanları, daha somut ya da daha kolay algılanır biçimde gerektiğinde sözel, gerektiğinde matematiksel bir ifade olarak ortaya koyma biçimidir.
A = {x : (x in özelliği)}
Burada **"x :"** ifadesi "öyle x lerden oluşur ki" diye okunur.
Bu ifade **"x |"** biçiminde de yazılabilir.

3. Venn Şeması Yöntemi
Küme, kapalı bir eğri içinde her eleman bir nokta ile
gösterilip noktanın yanına elemanın adı yazılarak
gösterilir.
Bu gösterime Venn Şeması ile gösterim denir.



C. EŞİT KÜME, DENK KÜME

Aynı elemanlardan oluşan kümelere **eşit kümeler** denir. Eleman sayıları eşit olan kümelere **denk kümeler** denir.
A kümesi B kümesine eşit ise A = B,
C kümesi D kümesine denk ise C º D
biçiminde gösterilir.

Eşit olan kümeler ayın zamanda denktir. Fakat denk kümeler eşit olmayabilir.

D. BOŞ KÜME
Hiç bir elemanı olmayan kümeye **boş küme** denir.
Boş küme { } ya da Æ sembolleri ile gösterilir.
Eşit olan kümeler ayın zamanda denktir. Fakat denk kümeler eşit olmayabilir.
{.} ve {0} kümeleri boş küme olmayıp birer elemana sahip iki denk kümedir.

{Æ} ve {0} kümeleri boş küme olmayıp birer elemana sahip iki denk kümedir.

E. ALT KÜME – ÖZALT KÜME

1. Alt Küme

A kümesinin her elemanı, B kümesinin de elemanı ise A ya B nin **alt kümesi** denir.
A kümesi B kümesinin alt kümesi ise A Ì B biçiminde gösterilir.
A kümesi B kümesinin alt kümesi ise B kümesi A kümesini kapsıyor denir. B É A biçiminde gösterilir.
C kümesi D kümesinin alt kümesi değilse C Ë D biçiminde gösterilir.

2. Özalt Küme

Bir kümenin, kendisinden farklı bütün alt kümelerine o kümenin **özalt kümeleri** denir.

3. Alt Kümenin Özellikleri

i) Her küme kendisinin alt kümesidir.

A Ì A

ii) Boş küme her kümenin alt kümesidir.

Æ Ì A

iii) (A Ì B ve B Ì A) Û A = B dir.
ıv) (A Ì B ve B Ì C) Ş A Ì C dir.
v) n elemanlı bir kümenin alt kümelerinin sayısı 2n ve özalt kümelerinin sayısı 2n – 1 dir.
vı) n elemanlı bir kümenin r tane (n ³ r) elemanlı alt kümelerinin sayısı

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!.r!} = \frac{n.(n-1).(n-2)...(n-r+1)}{r!} \text{ olur.}$$

vıı) $$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n \pm 1} = n$$

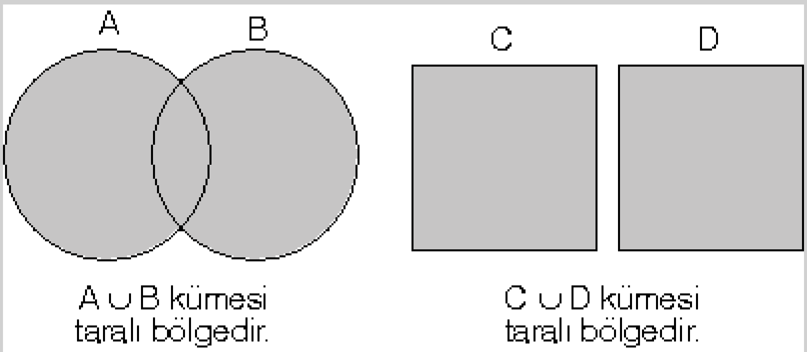
vııı) $$\binom{n}{x} = \binom{n}{y} \text{ ise, } (x = y \text{ veya } n = x + y) \text{dir.}$$

ıx) $$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$$

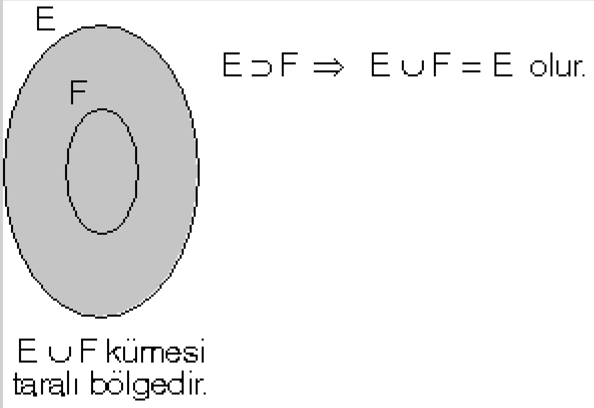
F. KÜMELERLE YAPILAN İŞLEMLER

1. Kümelerin Birleşimi

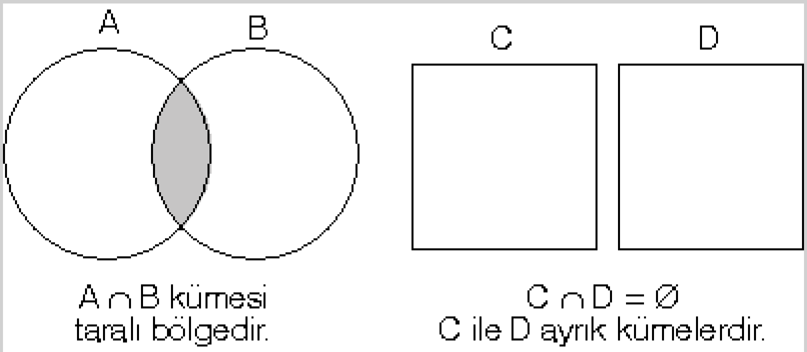
A nın elemanlarından veya B nin elemanlarından oluşan kümeye bu iki kümenin **birleşim kümesi** denir ve A È B biçiminde gösterilir.
A È B = {x : x Î A veya x Î B} dir.

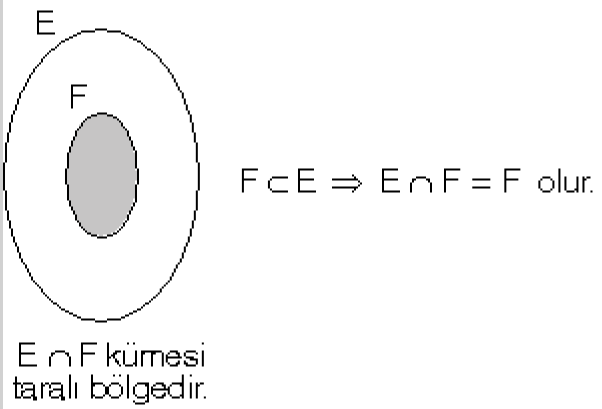


A ∪ B kümesi taralı bölgedir.
C ∪ D kümesi taralı bölgedir.



2. Birleşim Işleminin Özellikleri
i) A È Æ = A
ii) A È A = A
iii) A È B = B È A
ıv) A È (B È C) = (A È B) È C
v) A Ì B ise, A È B = B
vı) A È B = Æ ise, (A = Æ ve B = Æ) dir.
3. Kümelerin Kesişimi
A ve B kümesinin ortak elemanlarından oluşan kümeye A ile B nin **kesişim kümesi** denir ve A Ç B biçiminde gösterilir.
A Ç B = {x : x Î A ve x Î B} dir.

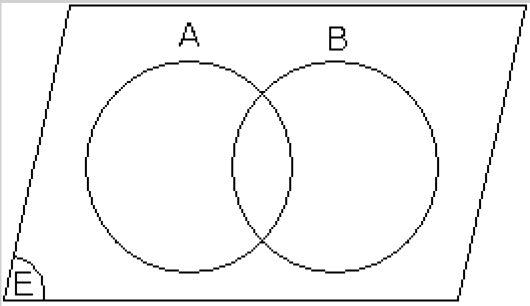




4. Kesişim Işleminin Özellikleri
i) A Ç Æ = Æ
ii) A Ç A = A
iii) A Ç B = B Ç A
ıv) (A Ç B) Ç C = A Ç (B Ç C)
v) A Ç (B È C) = (A Ç B) È (A Ç C)
vı) A È (B Ç C) = (A È B) Ç (A È C)

G. EVRENSEL KÜME

Üzerinde işlem yapılan, bütün kümeleri kapsayan kümeye, **evrensel küme** denir. Evrensel küme genellikle E ile gösterilir.



$A \cap E = A$

$A \cup E = E$

H. BİR KÜMENİN TÜMLEYENİ

Evrensel kümenin elemanı olup, A kümesinin elemanı olmayan elemanlardan oluşan kümeye A nın tümleyeni denir ve A ya da A' ile gösterilir.
A = {x : x Î E ve x Ï A, A Ì E} dir.

Tümleyenin Özellikleri

i) E = Æ
ii) Æ = E
iii) ($\overline{\overline{A}}$) = A
iv) A È A = E ve A Ç A = Æ dir.
v) A È B = A Ç B
vı) A Ç B = A È B
vıı) E È A = E ve E Ç A = A dir.
vııı) A Ì B ise, B Ì A dir.

I. KUVVET KÜMESI

Bir kümenin bütün alt kümelerin kümesine kuvvet kümesi denir. Kuvvet kümesi P ile gösterilir.
s = n ise, s(P) = 2n dir.

J. İKİ KÜMENİN FARKI

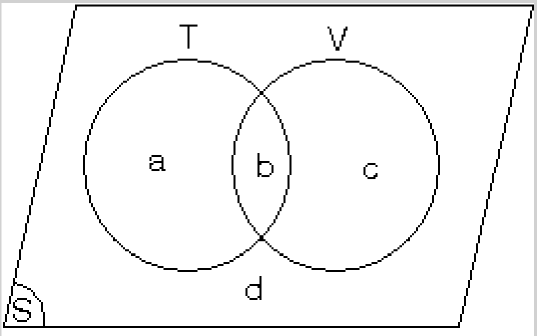
A kümesinde olup, B kümesinde olmayan elemanların kümesine A fark B kümesi denir. A fark B kümesi A – B ya da A \ B biçiminde gösterilir.
A – B = {x : x Î A ve x Ï B} dir.

Farkla Ilgili Özellikler

A, B, C kümeleri E evrensel kümesinin alt kümeleri olmak üzere,
i) E – A = A
ii) A – B = A Ç B
iii) A – B = A È B dir.
ıv) (A – B) È (B – A) = A D B (Simetrik Fark)

K. ELEMAN SAYISI

A, B, C herhangi birer küme olmak üzere,
i) s(A È B) = s + s(B) – s(A Ç B)
ii) s(A È B È C) = s + s(B) + s – s(A Ç B) – s(A Ç C)
– s(B Ç C) + s(A Ç B Ç C)
iii) s(A È B) = s(A – B) + s(A Ç B) + s(B – A)
ıv) a + b + c + d tane öğrencinin bulunduğu bir sınıfta voleybol oynayan öğrencilerin sayısı s(V) = b + c, tenis oynayan öğrencilerin sayısı s(T) = a + b, voleybol ve tenis oynayan öğrencilerin sayısı s(T Ç V) = b olsun.



Tenis veya voleybol oynayanların sayısı:

s(T È V) = a + b + c

Tenis ya da voleybol oynayanların sayısı:

s(T – V) + s(V – T) = a + c

Sadece tenis oynayanların sayısı:

s(T – V) = a

Tenis oynamayanların sayısı:

s(T) = c + d

Bu iki oyundan en az birini oynayanların sayısı:

s(T È V) = a + b + c

Bu iki oyundan en çok birini oynayanların sayısı:

s(A Ç B) = s(A È B) + s(T – V) + s(V – T) = d + a + c

Bu iki oyundan hiç birini oynamayanların sayısı:

s(A È B) = d

ÖZET; **Dilvin ALKAN**
Konu:Kümeler – Gruplar oluşturalım
Dünyadaki birçok hayvan grupları gruplar halinde yaşarlar, bunlara örnek olarak kuşlar ve karıncalar gösterilebilir.
Bu tür nesnelerin bir araya gelerek gruplar oluşturmalarına ***küme denir*** ve bu nesneler oluşturdukları kümelerin birer elemanıdır

1. Kümelerin kapalı şekillerle gösterilmesine **Venn Şeması** denir.Kümenin elemanları şeklin içine önüne nokta konarak yerleştirilir.Nokta konmasının sebebi elemanların bulunduğu yerin belli olmasıdır.
2. Kümenin elemanlarının küme parantezi ile {} bu şekille, kümenin elemanlarının arasına virgül konur.Buna **Liste yöntemi** denir.Örneğin A={at,kuş,böcek}
3. Kümenin elemanlarının cümlelerle ifade edilmesidir. Yine parantez içinde gösterilir.Örneğin; bir kümenin elemanları K={a,e,i,ı,o,ö,u,ü} ise bunu K={alfabemizdeki sesli harfler} diye de yazabiliriz.Bu tür yazıma **ortak özellik yöntemi ile gösterim** denir.

KÜME ÇEŞİTLERİ

1-) Boş Küme = Elemanı olamayan kümeye boş küme denir. □ veya {} ile gösterilir. Farazidir (Yalan gibi gerektiği yerde kullanılmalı) Enerjisiz alan düşünülemez.

2-) Eşit Küme = Bütün elemanları aynı olan kümelere eşit kümeler denir ve "=" ile gösterilir. Benzer küme hiçbir şey her şeyi her yönüyle öteki olmaz enazınada bir boyutları farklıdır.

3-) Denk Küme= Eleman sayıları aynı olan kümelere denk kümeler denir ve "□" ile göterilir.Saısal eşitlik.

4-) Alt Küme = Bir kümenin her elemanı başka bir kümede mevcut ise ilk kümeye ikinci kümenin alt kümesi denir.

Alt Kümenin Özellikleri

- ✓ $A \subset A$ Her küme kendisinin alt kümesidir
- ✓ $\emptyset \subset A$ Boş küme her kümenin alt kümesidir.
- ✓ $A \subset B$ ve $B \subset C$ ise $A \subset C$ dir.
- ✓ $A \subset B$ ve $B \subset A$ ise $A=B$ dir. Yada
- ✓ $A=B$ ise $A \subset B$ ve $B \subset A$ dir.
- ✓ Fark kümeleri yazınızı

Ayrıca bir kümenin eleman sayısı m olmak üzere bu kümenin alt kümeler sayısı 2^m dir. Bir de öz alt küme kavramı vardır. Eğer bir kümenin eleman sayısı m ise özalt küme sayısı 2^m-1 dir.

5-) Sonlu ve Sonsuz Kümeler: Eleman sayısı sonlu olan kümeye sonlu küme, eleman sayısı sonlu olamayan kümeye sonsuz küme denir.

ÖRNEK:

$A=\{x: -1<X<>\in Z\}$ olmak üzere $s(A)=5$ sonlu bir cümledir.

$A=\{x: -1<X<>\in IR\}$ kümesi sonlu sayıda elemana sahip olamayıp sonsuz bir kümedir.

KUVVET KÜMESİ

Bir A kümesinin bütün alt kümelerinin kümesine A kümesinin kuvvet kümesi denir ve P(A) ile gösterilir.

ÖRNEK: $A:\{a, x\}$ kümesinin kuvvet kümesini oluşturalım. A nın alt kümeleri $\emptyset$, $\{a\},\{x\},\{a,x\}$ olduğundan $P(A)=\left\{ \emptyset, \{a\},\{x\},\{a,x\} \right\}$ dir.

n ELEMANLI BİR KÜMENİN r ELEMANLI ALT KÜMELERİ

Bir A kümesinin ($n \geq r$ olmak üzere) r elemanlı alt kümelerinin sayısını pascal üçgeni yardımıyla buluruz.

1-Evrensel küme
2-Sistem kümesi
3-Serbest Küme
4-Koşullu Küme
5-Yarı koşullu kümeler