http://sinancanan.wordpress.com/

Bu siteden yararlanılmıştır

Kaos Kuramı ve Kaotik Sistemler

Kaotik dinamikler, kuantum fiziği ile kol kola ilerleyen ilginç ve yeni bir araştırma alanı. Kaotik sistem, kısaca, "başlangıç şartlarına hassas bağlılık gösteren ve ölçülemeyecek karmaşıklıkta sistemler" olarak tanımlanabilir. Kısacası, kaos bilimine göre, kaotik bir sistemin başlangıç şartlarındaki ölçülemez derecede küçük bir değişiklik, sistemin gelecekteki durumunda ölçülemez ve çok büyük değişikliklere neden olabilir.

Üzerinde bir kaç milyon tane bilardo topu bulunan çok çok büyük bir bilardo masası düşünelim. Ayrıca bu masa üzerinde herhangi bir sürtünme kuvveti olmadığını ve ilk verilecek olan hareketin hiç durmadan ve çarpışmalarla azalmadan, toplar arasında aktarılacağını kabul edelim. Bilardo oyuncumuz, görevi gereği elindeki sopa (ıstaka) ile, beyaz topa 1 kez vurup, tüm topları deliklere (önceden planladığı bir sıra ve rota ile) sokacaktır. Böyle bir durumda, yapılacak atış 1 tanedir ve kesinlikle tek bir doğrultuda gerçekleştirilmelidir. Eğer, ilk vuruşta, vurması gereken doğrultudan, santimetrenin milyarda biri kadar bile bir sapma yaparsa (ki bu mesafe oyuncumuzun algılama sınırının çok altındadır), -sözgelimi- daha yirminci çarpışmadan önce, tüm plan bozulacaktır ve istenen amaca ulaşmak mümkün artık olamayacaktır. Sistemin (yani bilardo masasının ve üzerindeki topların) son durumu ise, artık kesinlikle tahmin edilemez olacaktır. İşte böyle varsayımsal bir sistem, kaotik sistemlerin başlangıç koşullarına olan hassas bağlılığına güzel bir örnektir (böyle bir sistem kaotik değildir; sadece başlangıç şartlarının önemini vurgulamaktadır).

Burada dikkat edilmesi gereken iki nokta var: Birincisi, sistemin gelecekteki durumunun başlangıç şartları ile çok sıkıca ve hassas bir biçimde bağlı olması. İkincisi ve daha önemlisi ise, sistem karmaşıklaştıkça, sistemi kaotik duruma sokacak başlangıç değişkenlerinin sayısında ve karmaşıklığında büyük bir artış olması. Aslında bir milyon bilardo topu içeren bir masada bulunan topların hareketlerinin oluşturacağı karmaşıklık, son derece kaba bir örnektir. Biraz zorlanarak ve süper bilgisayarlar kullanarak, doğru rotayı hesaplayabilirsiniz (yine de bu çok ama çok zor olacaktır; fakat mümkündür). Bunun yanında, bir bardak dolusu suyu ve onu oluşturan molekülleri düşündüğünüzde, devamlı titreşen trilyonlarca elemandan oluşan ve birbiri ile sürekli etkileşim halindeki bu su moleküllerinin hareketleri, kaotik bir sistemi anlamada daha iyi bir örnek oluşturabilir. Buradaki hareketler, aklımıza gelen-gelmeyen her türlü faktörden etkilenebilir ve sistemin son durumu, veya içindeki herhangi br molekülün “t” zaman sonra hangi konum ve pozisyonda olacağı tamamen belirsizdir.

Özellikle dikkat edilmesi gereken önemli bir konu da, Kaos’un rastgelelik olmadığıdır. Kaotik sistemler, bilinçsizce de olsa tüm girdileri değerlendirip ona göre nihai bir davranış ortaya koyarlar. Değişkenlerin çok sayıda olması, ortamı kaotik yapan temel etkendir. Ayrıca çoğunlukla kaotik sistemlerin dağılmaya karşı sürekli bir enerji girdisi ile de beslenmesi gerekir (bkz. Dağılıcı yapılar). Kaotik terimi, insanın hesaplamaya muktedir olmadığı, son derece karmaşık, ama kendi iç düzenine sahip süreçleri kasteder. Kaotik hareketin, rasgele her durumu alamadığı, belli bir olasılıklar kümesi içerisinde hareket etmekz zorunda olduğunu biliyoruz. Yani kaos, aslında oldukça karmaşık bir “düzen”dir. Bu durum “deterministik (belirlenirci) kaos” olarak bilinir. Aynı zamanda nedeni ve seyri bilinemeyen, hesaplanamaz olan ve rastgele etkleşimlerle yönetildiğine inanıların “stokastik (rastlantısal) kaos” diye bir kavram da mevcuttur. Fakat bilimin bu gün ilgilendiği alan daha ziyade deterministik kaosun hüküm sürdüğü sistemlerdir.

Dolayısıyla, kaotik sistemler için iki temel kural söyleyebiliriz:

1. Kaotik sistemler (biz belirleyemesek de) içkin bir düzene uyarlar, rastgele değildirler.

2. Kaotik sistemler, başlangış şartlarına çok hassas bir biçimde bağımlıdırlar.

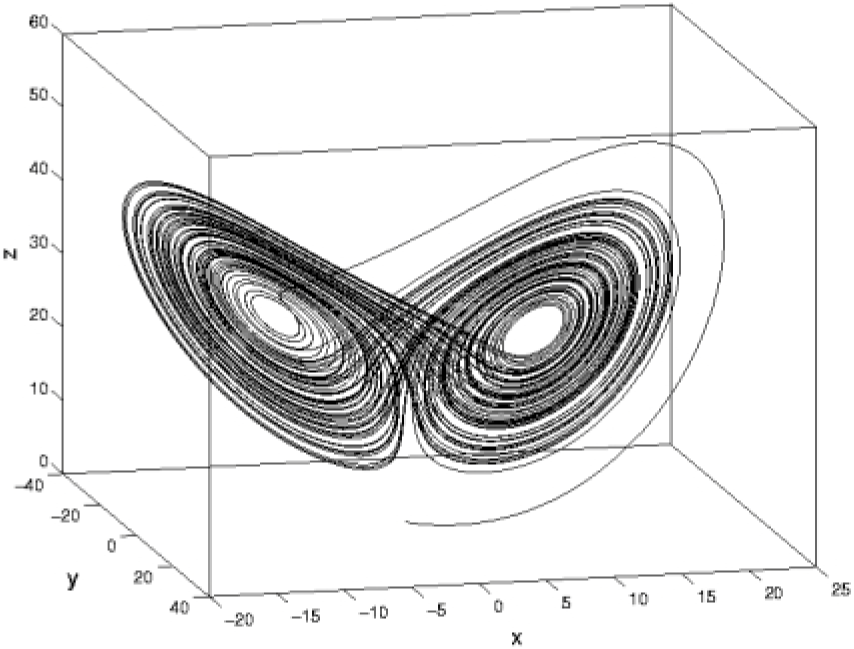
Kaos ve Kaotik Çekerler

Kaotik sistemler, sadece düş gücü ürünü olarak üretilmiş veya laboratuvar şartlarında oluşturulabilen sistemler değildir. Evren bizzat (belki de tamamen) kaotik bileşenlerden oluşur. "En iyi bilinen mekanizma" diye nitelenen olaylarda bile, artık kaotik davranışların rolünü göz ardı edemiyoruz. Herhangi bir taşla yapılan basit bir serbest düşme deneyi bile, evrendeki tüm kuvvetlerle ilgili olarak, belirsiz bir hesap hatasıyla sonuçlanacaktır. Çünkü, kütlelerle doğru, aradaki uzaklığın karesi ile ters orantılı olarak, Andromeda galaksisindeki küçük bir göktaşı bile, bizim taşımıza bir çekim kuvveti uygulamaktadır. Ama elbette ki, bu değişkenlerin tümünü hesaba dahil etmek, insanın yapabileceği bir şey değildir ve biz bu tip değişkenleri gönül rahatlığıyla ihmal edebiliriz. Bizim şansımız, ölçüm yöntemlerimizin, evrenin ince ve narin dokusuna göre oldukça kaba olması ve (evrensel etkileşimlere oranla) çok kaba sonuçlarla yetinebiliyor olmamızdır.

Bir taşı elimizden bıraktığımızda, onun yere düşmesini bir "kural", yahut mecburi tek sonuç olarak algılarız ve hep bunu bekleriz. Oysa durum bundan biraz farklıdır. Sistem bileşenleri, tüm etkileşimler göz önüne alındığında, bir olasılıklar yumağı içinde sürüklenir ve o anki durum için geçerli olasılığa doğru bir "çökme" gerçekleşir. Yani artık kesin kurallar değil, olasılıklar söz konusudur. Elimizdeki taşın, üzerine etkiyen değişik kuvvet kaynaklarının varlığına bağlı olarak, uzayın her yönüne hareket etme ve hatta parçalanıp dağılma "şansı" vardır. Fakat, elden bırakma ve düşme süreci boyunca, tüm karmaşık kuvvetlerin toplamı olan net kuvvet, "genellikle" taşı yere doğru indirir. Bu durumda biz de genel olarak geçerli bir "serbest düşme yasası"ndan bahsedebiliriz. Halbuki bu aysaya rağmen diğer tüm ihtimaller hala ihtimal dahilindedir.

Fakat bir çok sistem (özellikle de canlı sistemler), böyle davranmazlar. Akan bir nehirdeki su, düşünen bir insanın beynindeki elektrik akımları, bir jet uçağının motorundan çıkan hava veya kan hücrelerinin vücut savunmasındaki tepkileri, ağaçların ve akarsu deltalarının biçimleri, önceden kesin olarak tahmin edilemeyen bileşenler içerir. Bu sistemlerin hemen tümünün ortak özelliği, çok fazla sayıda kaynak tarafından etkilenmeleri ve davranışlarının bu nedenle "kaotik" olmasıdır.

Kaotik sistemlere bu gün bildiğimiz anlamıyla ilk dikkat çeken kişi Lorenz adlı bir meteorologdur. Kendisi, 1960 yılında, hava tahminleri yapmak için kullandığı bilgisayarda, başlangıç verilerini (bir ihmal sonucu) hafifçe değiştirdiğinde ortaya çıkan anlamlı sonuç değişiklikleriyle şaşkına dönmüştü. Bu, kaotik sistemler fikrinin ilk ortaya çıkışına öncülük eden bulgu oldu. Daha sonra Lorenz, kaotik sistemlerin belli sınırlar içerisinde değişim gösterdiğini ve bu sınırlar içerisindeki hareketlerinin belirlenemez olduğunu gördü. İşte kaotik sistemleri kendi taraflarına çeken bu olasılık odaklarına "kaotik çekerler" adı verildi. Bu çekerler (garip çekerler de denir), grafik gösterimlerle izah edilebilmektedirler. Bunların şekil olarak belki de en ünlüsü, kelebek biçimli **Lorenz çekeri**dir.



Lorenz Çekeri

Bu “çeker” aslında sadece grafik bir temsilden ibarettir. Çizgiler, sistemin durumunun faz uzayı (sistemin alabileceği muhtemel tüm durumları gösteren grafik alanı) içindeki zamana bağlı evrimini göstermektedir. Bu tip bir çekerde, sistemin elemanları, iki büyük olasılık kümesi arasında gidip gelirler (çizgilerin çevresinde dolandığı odaklar). Bu olasılık kümeleri içinde veya çevresinde nasıl bir davranış gösterecekleri bilinmezken, sistem tamamen belli sınırlar içinde (yani şekilde, çizgilerden oluşan alanda) hareket eder. Sadece, hangi olasılıklar içinde hareket edeceği bellidir, kesin hareket rotası önceden bilinemez. İşte o yüzden, iki-üç günden daha ileriye dönük “kesin” hava tahminleri yapmak hala mümkün değildir; veya, halihazırdaki değişkenlerden yola çıkarak, herhangi bir ülkede yaşayan insan topluluklarının zaman içinde nasıl bir değişim göstereceklerini aynıyla tahmin edemezsiniz. Çünkü tüm rota başlangıç şartlarına hassas bir şekilde bağlıdır. Yapacağınız tahminin kendisi bile rotayı etkileyebilir!

Kaotik yahut “garip” çekerlerin bir diğer önemli özelliği de “fraktal” yapıda olmalarıdır. Fraktal geometri hakkında ileride biraz daha ayrıntıya gireceğiz, fakat buradaki özelliği kısaca tarif etmeye çalışalım: Garip çekerleri oluşturan eğrilerin seyrine, bir başka deyişle, göz önüne alınan parametrelerin birbirlerine göre zamansal evrimine baktığımızda, çizgilerin asla iki kez aynı rotayı izlemediğini, rotalar arasında hep (çok küçük de olsa) bir farklılığın bulunduğunu görürüz. Çok uzun bir zaman süreci için bilgisayarlar yardımıyla çizdirilen garip çekerlerle bu özelliği anlamak daha kolaydır. Böyle bir benzeşimde (simulasyonda) elde ettiğiniz garip çeker grafiğini her yönden inceleme, istediğiniz kadar büyütüp küçültme şansınız vardır. Böyle bir “sanal çeker”e ne kadar yakından bakarsanız bakın, eğer yeterince uzun zaman boyunca kaydedilmişse, her bir büyütme derecesinde yeni ayrıntılar çıkar karşınıza. Üst üste binmiş gibi gözüken bir kaç yörünge geçişine yakından baktığınızda, rotaların aslında çok farklı olduklarını, aralarında belirgin bir ayrılık olduğunu görebilirsiniz. Sistem, kendine benzer (self-similar) bir tarzda örülürken, başlangıç şartlarına hassas bağlılık özelliği gereği, sistemin her bir hali tek ve yeganedir. Sistemin her bir halini temsil eden noktalar dizgesi (yörüngeler) de işte bu yüzden, bazen kesişseler bile, sürekli aynı rotayı takip etmezler. Bu da çekerleri oluşturan eğrilere “fraktal” bir görünüm verir; yaklaştıkça şeklin bütününü oluşturan kurallara uygun yeni ayrıntılarla yüz yüze gelirsini ve bu, sonsuz kadar sürer.

İleride bu verilerin, sinir bilimleri için ne anlam ifade ettiğine ve bu dala ne gibi yeni yorumlar getirebileceğine kısaca bakacağız.

Dağılıcı (Dissipative) Sistemler – Düzen Doğuran Kaos

Nobel ödüllü Kimyacı İlya Prigogine, kaos ve karmaşıklık bilimi üzerine yaptığı çalışmalarda, özellikle canlıları oluşturan maddenin cansız maddeden olan farklarına dikkat çekmişti. Canlılar gibi, enerji akışını kullanan fakat enerjinin neden olduğu düzensizlik artışına teslim olmayan sistemlerin kendi kendilerini örgütleyebildiğini ve termodinamik dengeden uzak durumlarda bu doğurgan ve dinamik düzeni koruyabildiklerini farketti. İşte bu tip sistemlere bu gün biz genel olaral dağılıcı (dispatif) sistemler adını veriyoruz.

Şimdi bu konuyu biraz daha anlaşılır şekilde açmaya çalışalım.

Cansız madde ile canlılar arasındaki farklara, sözlü olarak ifade edemesek bile hepimiz aşinayızdır. Canlılar, sağlıklı ve hayatta oldukları sürece iç dengelerini korurlar, beslenirler, ürerler ve yaşamları boyunca enerji harcayarak, beden bütünlüklerini korurlar. Cansız madde ise bu özelliklerin hiç birisine sahip değildir. Taştan yapılam bir heykel, zaman ilerledikçe aşınır, yıpranır, kirlenir, kırılır ve sonuçta dağılır gider. En kompleks makinalarımız bile zamanla eskir ve en azından parçalarının değişmesi gerekir. Makinalarımız enerji kullanmalarına rağmen bu enerjiyi kendilerini yenilemek için kullanamazlar. Başka bir deyişle "otopoietik" (kendi kendini inşa edebilen) yapılar değildirler onlar; kendileri dışında bir işleve hizmet eden "allopoietik" özelliktedirler.

Bu farkı oluşturan bazı özellikler aslında cansız bileşenlerden oluşan bazı sistemlerde de gözlenir. Kimyacılar bu tip örneklere aşinadır. Bazı asidik karışımlar, belli iyonları içeren ortamlarda, bazen saatler ve günler süren ritimli değişiklikler gösterirler (örneğin nabız atımı gibi periyodik olarak gözlenen hacim değişimleri gibi). Yine aslında cansız bileşenlerden oluşmasına rağmen, etrafımızı çeviren atmosferdeki davranışlar da yine böyledir; çok boyutlu bir değişkenler ağı tarafından yönetilen ritmik hareketler görürürüz. Bu tip sistemlerin hemen hepsinin ortak özelliği, enerji akışı devam ettikçe, harcadıkları enerjiye karşılık, iç yapılarını düzenli tutabilmeleridir. Bunu, kullandıkları enerjinin önemli bir kısmını dışarıya vererek ve dış dünyanın entropisini artırarak yaparlar. Bu durum, sistemin dağılma eğiliminin bir ölçüsü olan iç entropiyi adta dışarıya doğru boşlatma işlevi görerek, yapu veya sistemin uzun ömürlü ve kararlı olmasını sağlar. Bir başka ortak özellik ise, bu sistemlerde termodinamik denge dediğimiz durumun görülmemesidir. Sistemi oluşturan bileşenler ve enerji, bu tip sistemlerde oldukça dengesiz bir dağılım gösterir ve aslında sistemi "hayatta" turan da, işte bu dengeden uzak konumdur. Sözün özü; enerjilerini bu şekilde kendilerini idame etmek için kullanan ve entropilerini sürekli düşük tutma özelliğine sahip yapılar "dağılıcı yapılar" [dissipative structures/systems] olarak bilinir. Bunlara "dağılıcı" denmesinin nedeni ise, az önce bahsettiğim gibi, fazla ve yıkıcı entropilerini enerji akışı halinde dış dünyaya vermeleridir. Böylece, evrenin entropisini (düzensizliğini) sürekli artırarak kendi entropilerini düşük tutarlar. Bu gerçeğe ilk dikkat çekenlerden birisi, öykümüzün kunatumla ilgili bölümünde tanıştığımız Erwin Schrödinger'dir. Schrödinger, kuşaklar boyu bilimadamlarını etkileyen ve hatta DNA'nın bulunmasının yolunu açan "Yaşam Nedir?" (What is Life?) adlı kitabında, yaşamın ne olduğu sorununa bir fizikçinin bakış açısıyla yaklaşarak, ilginç tesbitlerde bulunur. Bunlardan bir tanesi de, yaşamı oluşturan ve güneşten kaynaklanan enerji döngüsü üzerine yaptığı analizdir. Schrödinger, güneşten gelen enerjinin bitkilerce "besin"e dönüştürülmesini ve diğer tüm canlıların da bu temel besinle beslenmesini tartıştıktan sonra, beslenmenin ve besinlerden enerji elde etmenin amacını, bu besinleri yakma işlemi sonucunda ortaya çıkan enerjinin çoğunun "ısı" olarak çevreye yayılmasına bakarak, canlının entropisini düşürme olarak açıklar. Bu gün, dağılıcı sistemlerde de karşımıza çıkan durum budur.

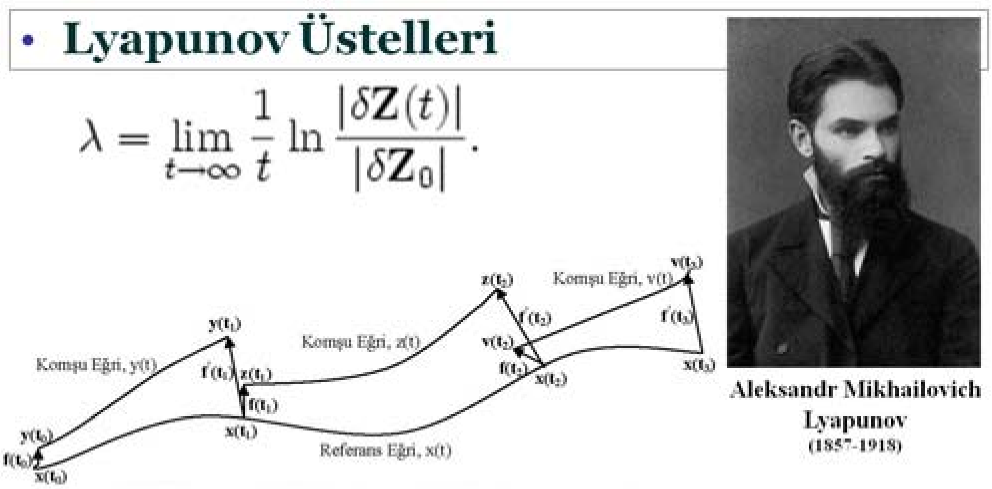
Dağılıcı sistemler, enerji girdisi sürdüğü sürece, karmaşık etkileimler gösteren hiyerarşik iç dinamiklerinden şaşırtıcı düzenler doğurabilirler (az önceki kimyasal eriyik örneğinde olduğu gibi). Canlılar da aynen dışarıyla enerji ve bilgi alışverişinde bulunan açık sistemler olarak, dağılıcı sistem özelliği sergilerler. Canlılık, maddenin karmaşık bir düzen oluşturacak şekilde bir araya getirilmesi ve bu birleşmeden tutarlı ve iç dengesini (homeostazis) koruyabilen bir oraganizma çıkmasını sağlar. Halen, bu karmaşık sistemin nasıl işlediğine ve kendi kendisini nasıl idame ettirdiğine dair bilgilerimiz çok sınırlı ve bölük pörçüktür. Fakat kaos anlayışı, canlı sistemlerin özünü anlamak konusunda bize şimdiye kadar sahip olmadığımız bir çok ipucu sunuyor.

Kaosu Ölçme Yöntemleri

Bir sistemin kaotik olup olmadığını anlamak için elimizde ilk olması gereken şey, sistemin davranışına dair olabildiği kadar uzun süreyle kaydedilmiş bir değişkenler kaydıdır. Sistemin zamanla değişen parametrelerini gösteren ve sistemin zaman içinde nasıl bir davranış gösterdiğinin bir yansıması olanb u tip verilere "zaman serileri" adı verilir. Örneğin saatler boyunca bir insan beyninden kaydedilen elektroensefalogram verileri, zamanla kafatası üzerindeki elektriksel akımların nasıl değiştiğini gösteren bir zaman serisidir aslında. Şimdi, bir zaman serisinin kaotik olup olmadığını anlamak sık kullanılan bazı matematiksel araçlara kısaca bir göz atalım:

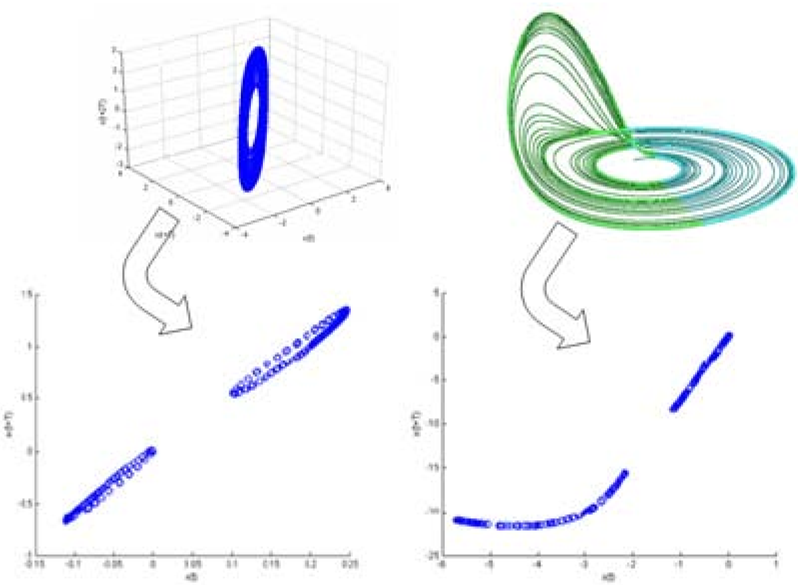
Çeker oluşturma (attractor construction): Zamanda değişkenlik gösteren bir sinyalin kaotik analizi için ilk basamaklardan birisi genellikle sistemin davranışının faz uzayındaki görünümünün elde edilmesidir. Bir dizi karmaşık hesap gerektiren bu süreç, bilgisayarlar yardımıyla bugün kolaylıkla gerçekleştirilebilmektedir. MATLAB gibi yazılımların içinde bu işlem için kullanılabilecek hazır makro ve algoritmalar mevcuttur. Çeker oluşturmak için bilinmesi gereken en önemli parametre "**gömme boyutu**" (embedding dimension) denen parametredir. Gömme boyutu, sistemin davranışlarını etkileyen bağımsız dinamik kaynakların sayısını tahmin eden bir hesaplamadır ve böylece incelenen sistemin davranışının en iyi biçmde görsel hale getirilebilmesi için kaç boyutlu bir faz uzayına ihtiyaç olduğu bu şekilde hesaplanır. Görsel tutarlılık açısından üç boyuttan daha büyük gömme boyutları pek tercih edilmese de bazı karmaşık kaotik sistemlerde çok daha büyük boyutlu faz uzaylarına ihtiyaç duyulabilmektedir. Gereken bir diğer parametre de "**zaman gecikmesi**" (time delay) parametresidir. Bu hesaplama sonucunda, zaman serisinin hangi zaman aralıklarında geciktirilerek grafiğe dökülmesi gerektiği hesaplanır. Özellikle EEG (elektorensefalogram) gibi tek boyutlu zaman serilerinde bu yöntem sıklıkla kullanılmaktadır.
Lyapunov Üstelleri: İlk defa Aleksandr Mikhailovich Lyapunov (1857-1918) tarafından tanımlanan bu yöntem, bir zaman serisinin kaotik bileşenler içerip içermediğini anlamamıza yarayan matematiksel bir analiz yöntemidir. Lyapunov üsteli, bir sistemin olası durumlarını gösteren "çeker"ler üzerinde, başlangıçta yakın komşu olan iki rastgele noktanın birbirlerinden ayrılma derecesinin sayısal bir fadesidir. Eğer bu komşu noktalar hızla birbirlerinden ayrılıyorlarsa, hesaplanan en büyük Lyapunov üsteli pozitif bir değerde

olacaktır ve bu da incelenen sistemin davranışının kaotik olduğuna dair önemli bir işarettir. Başka bir deyişle Lyapunov üsteli, “başlangıç şartlarına hassas bağlılık” özelliğinin sayısal bir göstergesidir.



En büyük Lyapunov üstelinin pozitif olması kaotik durumun bir gostergesidir. Laypunov üstellerinin sayısı sistemin kurgulandığı faz uzayının boyut sayısına göre değişir. Örneğin, üç boyutlu bir faz uzayında karşılaşılabilecek Lyapunov üstelleri (λ1, λ2, λ3) şöyledir; (-,-,-): sabit nokta, (0,-,-): limit döngü, (0,0,-): simit, (+,0,-): garip çeker (kaos). Lyapunov üsteli hesaplamaları genellikle uzun süreli ve temiz kaydedilmiş zaman serileri üzerinde en iyi sonucu verirken, daha kısa süreli ve kısmen gürültülü sinyaller üzerinde yapılacak hesaplamalar için ilave bazı algoritmalar kullanılması gerekir.

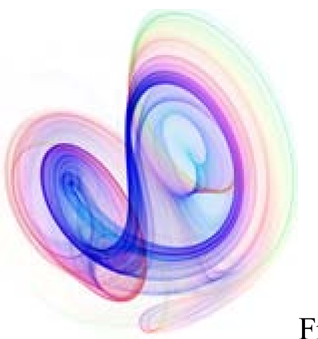
Poincaré Kesiti (Poincaré Section): Oluşturulan çekerler (attractor) genellikle çok karmaşık yapılara sahip olabilirler ve görsel olarak incelenmesi çoğu zaman oldukça zordur. Poincaré kesitleri olarak bilinen yöntem bu zorluğu aşmadaki en önemli yardımcılardan birisidir. Adından da anlaşılacağı üzere, bu yöntemle, karmaşık yapılı kaotik çekerlerin istenen herhangi bir noktasından geçen kesitler alınarak, bu kesitlerin görünümlerine ve özelliklerine göre sistem hakkında bazı yargılara varılabilir. Bu yöntem, canlı dokuların yapısını anlamak için onlardan ince kesitler alınarak mikroskop altında incelenmesine dayanan histoloji biliminin işlevine çok benzer aslında.



Faz uzayına çizilen çekerlerden elde edilen kesitlerin görüntüleri sistemin dinamiği hakkında da bir fikir verir. Nasıl ki bir simitten alınan kesit bir daire veya elips olarak karşımıza çıkarsa, burada da kesitlerin görüntüleri, faz uzayındaki çekerin yapısı hakkında bize bir çok fikirler verir. Özetle söylemek gerekirse, Poincaré kesitindeki noktaların dağılımı tek ve küçük bir bölgede sonlu sayıda ise hareket *periyodik*, kapalı bir eğri ise hareket *yarı periyodik*, belirli alanlarda yoğunlaşmış kümeler şeklinde ise hareket *kaotik*tir.

Doğrusalsızlığın Tesbiti (Detection of Nonlinearity): Bir zaman serisinde izlenen sinyallerin doğrusal olup olmadığını anlamanın da bazı matematiksel yolları vardır. Bir dizi karmaşık matematiksel teknikle, bilgisayarların hızlı işlem gücünü de kullanarak bugün bu işlemler hızlı bir biçimde yapılabilmektedir. Bu amaçla en çok kullanılan yöntem "vekil veri analizi" (surrogate data analysis) denen yöntemdir. Bu analiz tipinde, eldeki sinyalin bir bezerini oluşturmak için doğrusal (lineer) bir algoritma kullanılır ve üretilen yapay (vekil) sinyalle gerçek sinyal arasındaki ilişkiler incelenir. Eğer ilişki yoksa, sonuçta sinyalin doğrusal olmadığı gösterilmiş olur. Bu yöntemin yanında daha başka bir çok hesaplama tekniği de önerilmiştir fakat hepsinin de sadece belli durumlarda geçerli olmasına neden olan bazı zayfılıkları vardır.

Fraktal Geometri ve Kaos

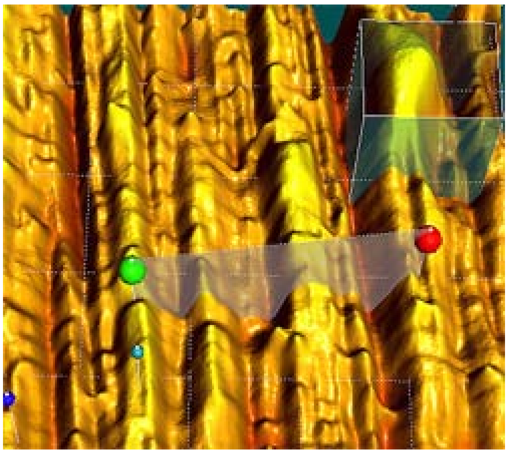


Fraktal geometri, yaklaşık çeyrek asırdır bilim dünyasının gündeminde olan ve doğadaki karmaşık biçim ve süreçleri gittikçe daha iyi anlamamıza yardımcı olan özel bir geometri dalıdır (*daha geniş bilgi için "Kaosun Resmi: Fraktal Geometri" başlıklı yazıma bakabilirsiniz*). Bu geometri dalı, orta öğretimden beri bildiğimiz Öklit (Euclid) geometrisinden çok farklıdır. Tamamen matematiksel soyutlamalardan ibaret olan Öklit geometrisi, bildiğimiz üçgenlerin, doğruların, karelerin ve küplerin geometrisidir. Teknoloji ve matematik alanında çokça işimize yaramasına rağmen, bu geometri doğadaki biçim ve süreçleri açıklama konusunda bize ancak sınırlı bilgi verebilmektedir. Fraktal geometriyi bugün bildiğimiz boyutlara taşıyarak bilim dünyasındaki yerini almasını sağlayan Benoit Mandelbrot, dağların konilere, yıldırımların düz çizgilere, kıyı şeritlerinin eğrilere, bulutların dairelere benzemediğine vurgu yaparak, doğayı anlamak için yeni bir geometriye ihtiyacımz olduğunu söylüyor (Fractal Geometri of Nature; B. Mandelbrot). 1980'li yıllarda söylediği bu sözlerinde ne kadar haklı olduğunu çok kısa bir süre geçtikten sonra anlaşıldı. Fraktal geometri daha sonraki bölümde örneklerini vermeye çalışacağım gibi, bir çok yeni anlayış ve analiz yönteminin doğuşuna zemin hazırladı. Bu gün özellikle biyolojid, canlı süreçleri ve yapıları anlayacak yepyeni yöntemlerimiz mevcut.Bu yöntemlerin bir çoğunda "fraktal" bakış açısının izlerini görebilirsiniz.

Fraktal (Kesirli) Boyutlar

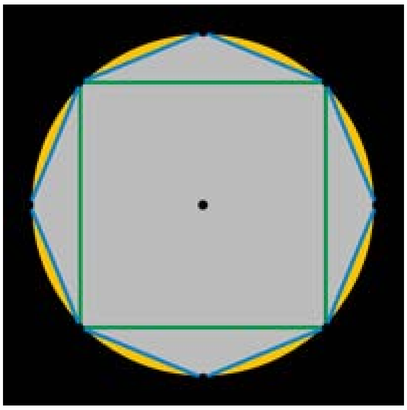
Fraktal geometrinin anlayışımıza kattığı önemli bir kavram da "fraktal boyut" kavramıdır. Boyut dediğimiz şey, özellikle soyut içerimleri olan bir kavramdır. Bildiğimiz gibi, matematikte "nokta", boyutsuz bir kavramı temsil etmek için kullanılır. Benzer şekilde, eğrilik ve karmaşıklığına bakılmaksızın bir çizgi (yahut eğri) tek boyutlu, bir yüzey iki boyutlu ve katı nesneler üç boyutlu olarak bilinir. Einstein'in görelilik kuramından sonra, içinde yaşadığımız üç boyutlu evrene bir de dördüncü zaman boyutu ilave edildi. Fakat bizim yapısal (geometrik) anlamda kavrayabildiğimiz boyutların sayısı üçtür. Zira içinde yaşadığımız mekanlar üç boyutludur (yahut biz o kadarını algılayabildiğimiz için bize öyle gelir). Dolayısıyla dünyamızdaki tüm maddesel nesneler gerçekte bizim için üç boyutludur (ne kadar ince olsalar da en, boy ve yükseklikleri vardır). Daha alt boyutlar (iki, bir ve sıfır boyut) bizim için ancak kavramlardan ibarettirler; bunlarla gerçek hayatımızda karşılaşmayız. Eğer ortaöğretim sırasında nokta, eğri, doğru veya yüzeylerden kafası karışanlardansanız, bu kısmı seveceksiniz: Fraktal geometri bizlere bu bildiğimiz boyutlara ilaveten kesirli (fraktal) boyutları armağan etti! Fraktal geometri sonrası 1,23 boyutlu çizgilerden, 2,355 boyutlu yüzeylerden bahsedebiliyoruz artık. Peki bunlar nedir ve bizim için gerçekten önemli midir?

Fraktal boyut, bir yapının karmaşıklığını bize gösteren oldukça faydalı bir sayısal değerdir. Bir üçgenin, yahut bir dairenin kenarlarını oluşturan çizgilerin, yahut o izgileri oluşturan sonsuz sayıda noktanın boyutunu belirlemekte bir zorluğumuz yok. Sonuçta tüm Öklit biçimleri sıfır, bir, iki ve üç boyutlu bileşenlerden oluşurlar. Gerçek dünyada da sağduyumuz (beynimizin kolaylaştırıcı işlevleri sayesinde) boyut tesbitinde zorlanmaz. Ayakkabımızın biraz çok-birimli bir yapısı olsa da, üç boyutlu bir nesne olduğunu biliriz. Ayakkabımızın dış yüzeyi ise, kuramsal olarak iki boyutlu bir yüzey olarak düşünülebilir. Evimizde duvara asılı durumda duran bir ayna da böyledir. Düz bir aynanın yüzeyi aslında iki boyutlu bir yüzey örneğidir. Sağduyumuzun bize söylediği budur ama, aslında gerçek biraz daha farklıdır.



[Çelikten bir yüzeyin elektron mikroskobu altındaki görünümü]

Ayakkabınızın, yahut aynanızın yüzeyine mikroskopla baktığınızı düşünün. Ayakkabınızın yüzeyi (hele bir de, örneğin, süet bir ayakkabı ise) mikroskobik olarak karmakarışık bir yapıya sahiptir ve asla, dışarıdan bakıldığı zaman görüldüğü gibi dümdüz değildir. Ayna için de aynı şey geçerlidir: Güçlü bir mikroskopla baktığınızda göreceğiniz görüntü, eğer daha önce görmediyseniz sizi kesinlile şaşırtacaktır. O güzelce sırlanmış ve düzeltilmiş aynanızın yüzeyi girinti ve çıkıntılarla, (tabir yerindeyse) dağlar ve vadilerle doludur. Bu görüntülerde gördüğünüz yapıları artık iki boyutlu yüzeyler olarak görmekte zorlanmaya başlarsınız. İşte fraktal boyut kavramı da burada devreye girer. Gördüğünüz şeyi matematiksel olarak bir-iki-üç boyuttan herhangi birine oturtamıyorsanız, ara değerler, tercih etmeyi düşünebilirsiniz. Fraktal geometrinin de bize sağladığı avantaj budur.



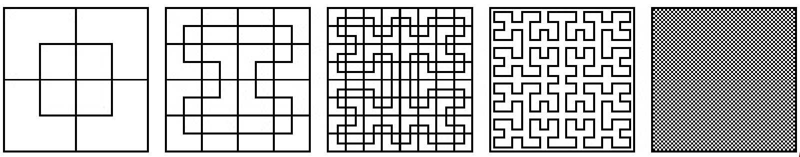
Fraktal biçimler, sonsuz kenar uzunlukları olmasına rağmen sonlu (sınırlı) alanları çeviren şekiller içerir (Koch kar tanesi, Sierpinski üçgeni, Mandelbrot kümesi gibi). Bu yapıların sınırlarını oluşturan çizgiler o denli karmaşıktır ki,bunları tek boyutlu çizgiler olarak nitelemek matematiksel olarak artık doğru değildir. Zira bu şekilllerdeki kenarları oluşturan algoritma (matematiksel bir fonksiyonun tekrar tekrar hesaplanması anlamında) bir “iterasyon”dur ve iterasyon sonsuza ilerlerken ilginç bir şey olur: Kenar uzunluğu sonsuza giderken, alan hep sınırlı kalır. Bunu anlamak için, bir dairenin içine, kareden başlayarak kenar sayıları gittikçe artan çokgenler yerleştirdiğimizi düşünebiliriz (*soldaki şekil*). Kare dört kenarlıdır; çevresi ise kenar uzuluğnunun dört katıdır. Şimdi, ilk çemberimizin içinde kalmak şartı ile kenar sayımızı artıralım: Beşgen, altıgen, yedigen, sekizgen… Daire içine yerleştirdiğimiz şekillerin kenar sayısı arttıkça iki şey olur: Öncelikle kenar uzunlukları kısalır ve kenar sayısı artsa da, uzunluğun kısalmasına bağlı olarak toplam çokgen çevresi gittikçe azalan bir hızla artar.İkinci olarak da, çokgenimizin kenar sayısını artırmakla, çokgenin kenar uzunluğunu daireye gittikçe daha çok yaklaştırırız. Fakat kaç kenarlı olursa olsun, çokgenlerimizin çevresi asla daireyle eşit olmayacaktır; ta ki, çokgenimizin kenarları, daireyi oluşturan çemberin "eğri kenarına" dönüşene kadar. İşte bu süreç içinde sonsuz kenar kullanabiliriz; fakat toplam alanımız yine de ilk dairemizin alanından daha küçük, yani sınırlı olacaktır.

İşte fraktal biçimler, böyle garip şeylerdir! Fraktal boyut ölçümü için matematikte Hausdorff-Besicovitch boyutu kavramı sıkça kullanılır. Kısaca tanımlamak gerekirse "bir yapıyı (örneğin bir çizgiyi) kaplamak için gereken disklerin çapı ve sayısı arasındaki ilişki" olarak ifade edilebilir. Formül olarak da D (Hausdorff-Besicovitch boyutu) = lim (h–0)[log N(h)]/[log(1/h)] olarak verilir. Burada N(h), kaplamak için gerekli olan disklerin sayısı ike, (1/h) ise diskin çapını belirtir. Bunu "bir birimlik bir doğru" için yapacak olursak: [log2^n/log2^n]=1 olur ki, bir doğru parçasının bildiğimiz topolojik (Öklid) boyutu da birdir. Fakat bu hesabı bir Koch eğrisi için yaparsak, Koch eğrisinde kenar uzunluğu her "büyütmede" 1/3′ün katları şeklinde arttığından:

$$\frac{\log 1}{\log 1}, \frac{\log 4}{\log 3}, \frac{\log 16}{\log 9}, \frac{\log 64}{\log 27}, \ldots \frac{\log 4^n}{\log 3^n} = \frac{n \log 4}{n \log 3} = \frac{\log 4}{\log 3} = 1.261859507 \ldots$$

Buradaki sonucu günlük tecrübeler ışığında tam olarak değerlendimek biraz sor olabilir. Kcoh eğrisi aslında bir çizgi olmakla birlikte, karmaşıklığı çok fazla olduğundan, boyutu 1′den fazladır.Fakat iki boyutlu bir yüzey de değildir; dolayısıyla bu karmaşık bir çizginin boyutunu 1 ile 2 arasındaki bir sayıyla ifade etmemiz gerekir. İşte Hausdorff-Besicovitch boyutu bize bunu sağlamaktadır.

Buradan, fraktal geometri için yeni bir tanım üretebiliriz. Bazı kaynaklarda fraktal biçimlerin "fraktal (kesirli) boyutları" olduğu sıklıkla göze çarpar; yukarıda ben de benzer bir ifade kullandım. Fakat (Peano doldurucu eğrileri gibi) bazı "fraktal" yapılar böyle değildir. Onların Hausdorff-Besicovitch boyutu 2 iken, topolojik boyutları 1 olabilir (zira Peano eğrisi aslında tek boyutlu bir eğridir; alttaki şekil). Yani bazı fraktallerin de Hausdorff-Besicovitch boyutu, bir "tam sayı" olabilir.



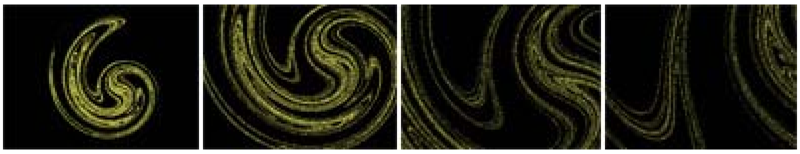
[Yüzeyi dolduran Peano eğrisinin oluşturulma basamakları]

Dolayısıyla fraktal biçimlerle ilgili daha doğru bir tanım olarak şunu söyleyebiliriz:

Fraktal, Hausdorff-Besicovitch boyutu (D) topolojik boyutundan (Dt) daha büyük (D>Dt) olan nesnelerin genel adıdır.

Süreçlerdeki fraktal boyutlar: Fraktal boyut kavramı, özellikle canlı dünyaya bakışımızda devrimsel değişikliklere yol açtı. Fraktal geometri dendiğinde aklımıza genellikle canlıların veya doğanın biçimsel özellikleri geliyor olabilir. Fakat fraktal geometrinin bize sağladığı faydalar, biçimleri anlamaktan da çok ötelere geçmiştir. Doğada meydana gelen bir çok olayın zaman içindeki seyirlerinin incelenmesi sonucunda, bu davranış biçimlerinin "fraktal" karakterler gösterdiği görülebilir. Örneğin, insan veya hayvanlardan, beynin aktivitesi sırasında kaydedilen EEG (elektroensefalografi) dalgaları, özel yöntemlerle incelendiğinde, sadece ekranda görüldüğü gibi "iki boyutlu çizgilerden" ibaret olmadıkları, yüksek karmaşıklığa sahip fraktal biçimler oldukları artık bilinen bir olgudur. Bunun gibi daha bir çok doğal süreçte fraktal karmaşıklık karşımıza çıkar.Hatta, daha ileriki bölümlerde değineceğimiz gibi, bir sistemin davranışındaki değişiklikleri ölçmek için "fraktal boyutlarındaki değişmelere bakmak" artık çok yaygın olarak kullanılmaya başlanan bir analiz yöntemidir.

Az önce bahsettiğimiz garip çekerler üzerinde yapılan boyut incelemeleri de fraktal sonuçlar vermekte. Yüksek karmaşıklığa sahip bu grafiklerin sadece görsel olarak değil, sayısal ve matematiksel olarak da fraktal yapıda olduklarını böylece gösterebiliyoruz (yani, Hausdorff-Besicovitch boyutları, toplojik boyutlarından daha büyük).



[Ikeda çekerinin farklı büyütmelerdeki görünümleri (1-4-16 ve 64 kez büyütülmüş görüntüler)]

Sonuçta gelinen noktada ilginç bir durum da karşımıza çıkıyor: Nasıl ki Öklid geometrisinin noktaları, çizgileri, düzlemleri ve küpleri aslında birer idealleştirme ise, sıfır,bir-iki ve üç boyut kavramları da aslında bizler için birer idealleştirmeden ibaret olabilir. İnsan beyni, etrafındaki evreni basitleştirerek algılamaya yönelik olarak çalışan bir aygıt olduğundan bu durum çok da şaşırtıcı olmasa gerek. Karmaiık matematiksel tekniklerin ve bilgisayarların gelişimine kadar beklemesi gereken bu fraktal ve kaotik yapı-süreç anlayışı, etrafımızdaki hiç bir şeyin aslında o kadar basit olmadığını bize bir kez daha farkettiriyor.

<<Bölüm-2 – Bölüm-3 >>

Bu yazının yayınlanma tarihi: Aralık 29, 2008 1:31 pm ve kategorisi: Bilim/Yorum, Kaos-Kuantum, Sinirbilimleri. Etiketler: Bilim Felsefesi, Fraktal geometri, Kaos Kuramı. Bu yazı için tüm yorumları takip edebilirsiniz RSS 2.0 besleme. Siz yorum yapın, veya geri izleme kendi sitenizden.