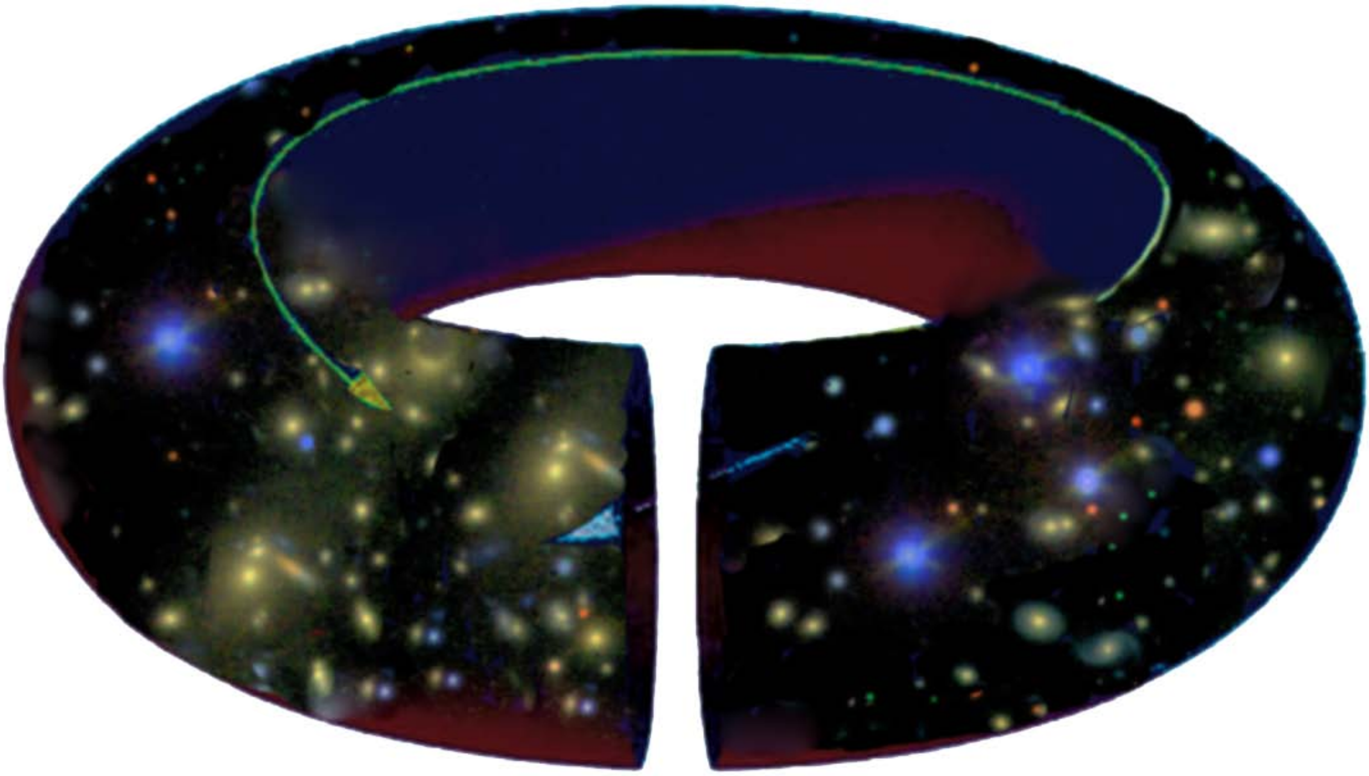


UZAYIN ŞEKİLLERİ

Asırlık Poincaré Savı'nın ispatı için vaadedilmiş olan 1 milyon dolarlık ödülü, belki de Rus matematikçi Grigori Perelman alacak. Matematikçi, ispatı gerçekleştirmekle üç boyutlu uzaylar katalogunu da tamamlamış bulunuyor.

Ayağa kalkın ve çevrenize bakın. Sıçrayın, ileri-geri yürüyün. Kollarınızı sallayın. Siz, her doğrultuda milyarlarca ışık-yılına uzanan bir 3-manifoldun (üç boyutlu uzayın) ufak bir bölgesinde hareket eden bir parçacıklar topluluğusunuz.

Manifoldlar (ya da çok katlılar, çok boyutlular) matematiksel yapılardır. Galileo ve Kepler'den bu yana fiziğin en büyük başarısı, gerçekliği şu ya da bu tür matematikle (örneğin manifoldların matematiğiyle) açıklamasıdır. Fizik, bütün olguların üç boyutlu uzay arka zemininde yer aldığını kabul eder (sicim kuramcılarının bu üç boyut dışında çok küçük boyutların varolduğu savlarını dikkate almazsak). Üç boyut, bir parçacığın konumunu saptamak için üç sayının gerektiğini söyler. Dünya yakınında bu üç sayı enlem, boylam ve yükseklik olabilir.

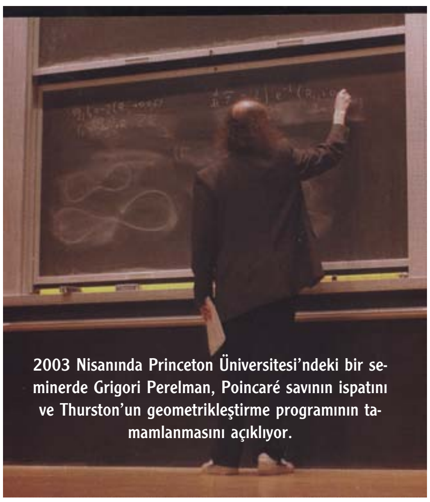
Newton fiziği ve geleneksel kuantum fiziği, her şeyin yer aldığı üç boyutlu uzayın sabit ve değişmez olduğunu kabul eder. Buna karşın, Einstein'ın genel görelilik kuramına göre uzay aktif bir oyuncudur: bir noktadan bir başkasına olan uzaklık, yörede varolan madde ve enerji miktarıyla ve geçmekte olan herhangi bir kütleçekim dalgası olup olmamasıyla da bağlantılıdır. Ne var ki, sözkonusu olan ister Newton ister Einstein fiziği olsun, uzay, sonlu ya da sonsuzluğundan bağımsız olarak, bir 3-manifold ile temsil edilir. Bu nedenle, 3-manifoldların özelliklerini anlamak, tüm fiziğin (ve tüm diğer bilimlerin) temelini tam olarak anlamak bakımından zorunludur. (4-manifoldlar da önemlidir: uzay ve zaman beraberce bir 4-manifold oluşturur.)

Matematikçiler 3-manifoldlar konusunda birçok şey biliyorlar; ama en temel bazı soruları yanıtlamak hiç de kolay olmadı. Manifoldları inceleyen matematik dalı, topoloji. Topologların 3-manifold konusunda sorabilecekleri bazı sorular şunlar: Yapısı en az karmaşık, en basit 3-manifold ne? Aynı ölçüde basit başka birçok kuzeni var mı; yoksa tek mi?

İlk sorunun yanıtı uzun süredir biliniyor: 3-küre olarak adlandırılan uzay, en basit kompakt ("tıkız") 3-manifolddur. (Kompakt olmayanlar, sonsuz olan, ya da bir kenarı olan manifoldlar olarak düşünülebilir. Burada yalnızca kompakt manifoldları ele alacağız.) Daha sonraki iki soruysa yüz yıl boyunca çözüm bekledi. Son olarak 2002 yılında Rus matematikçi Grigori ("Grisha") Perelman tarafından sunulan çözümse, Poincaré savı olarak bilinen kuramı büyük olasılıkla ispatlamış bulunuyor.

Bundan tam 100 yıl önce, Fransız matematikçi Henri Poincaré'nin ileri sürdüğü sav şu: 3-manifoldlar arasında yer alan 3-küre, benzersizdir; başka hiçbir 3-manifoldun bu denli 'basit' özellikleri yoktur. Daha karmaşık olan 3-manifoldlar, tuğladan bir duvar gibi yukarıya yükselen sınırlara, ya da bir ormanda önce ayrılıp sonra birleşen patikalar gibi, bir bölgeden diğerine uzanan birden fazla bağlantıya sahiptir. Poincaré savı, bu türden bir karmaşıklığı olmayan yegane 3-manifoldun 3-küre olduğunu ileri sürer. Küreyle bu nitelikleri paylaşan herhangi bir üç boyutlu nesne, 3-küreyle aynı biçime sokulabilir; topologlar için bu nesne 3-kürenin yalnızca bir başka kopyasıdır. Perelman'ın ispatı, aynı zamanda üçüncü soruyu da yanıtlayarak varolan bütün 3-manifold tiplerinin sınıflandırılmasını tamamlıyor.

Bir 3-kürenin neye benzediğini tasarlamak biraz beyin jimnastiği gerektiriyor. (Bu, sözcük anlamıyla bir küre değil.) 3-küre, hepimizin bildiği 2-kürenin birçok özelliklerini taşır: küre şeklinde bir lastik balonun lastiği, bir 2-küre oluşturur. 2-küre iki boyutludur; çünkü üzerindeki bir noktanın konumunu belirlemek için iki koordinat (enlem ve boylam) yeterlidir. Ayrıca, eğer balonun yüzeyinden çok küçük bir disk alıp onu bir büyüteçle incelerseniz düz, iki boyutlu bir lastik düzlemden kesilmiş gibi görünür. Yalnızca çok az bir eğriliğe sahiptir; balon, üstünde yürüyen ufak bir böcek için bir düzlem gibi algılanır. Ancak böcek, bir doğru gibi algıladığı bir çizgi üstünde yeterince yürürse, sonunda başladığı noktaya gelir.



2003 Nisanında Princeton Üniversitesi'ndeki bir seminerde Grigori Perelman, Poincaré savının ispatını ve Thurston'un geometrikleştirme programının tamamlanmasını açıklıyor.

Benzer şekilde, 3-kürede bir sinek, (ya da evrenimiz kadar büyük bir 3-kürede, bir insan!) kendisini, "bildiğimiz" üç boyutlu uzaydaymış gibi algılar. Ancak herhangi bir doğrultuda bir doğru üzerinde uzaya uçtuğunda, sonunda 3-küreyi çepeçevre dolaşarak kendisini başladığı noktada bulur; tıpkı balon üstündeki sinek, ya da dünya turuna çıkan biri gibi.

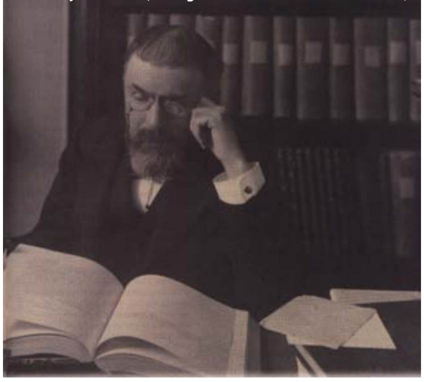
Üçten farklı boyutlarda küreler de var. 1-küreyi biliyoruz: yalnızca bir çember (yuvarlağın kendisi değil, kenarı). n-boyutlu küreye de n-küre deniyor.

Savların İspatı

Poincaré 3-küre savını önerdikten sonra, ispatı konusunda hiçbir ilerleme kaydedilmeksizin yarım yüzyıl geçti. 1960'larda matematikçiler savın beş ya da daha fazla boyutlu küreler için benzerlerini ispatladılar. Bu boyutların her biri için, n-küre yegane ve en basit manifolddur. İspatın, üç ve dörtten büyük boyutlar için daha kolay olması, çelişki gibi görünüyordu. Özellikle zor olan dört boyut için ispat, 1982'de geldi. Geriye yalnızca Poincaré'nin ilk savı olan 3-küre kalmıştı.

Üç boyut probleminin çözümündeki ilk büyük aşama, 2002 Kasımında St. Petersburg'daki Steklov Matematik Enstitüsü'nden geldi. Matematikçi Perelman, fizikçi ve matematikçilerin yeni araştırmalarını gönderdikleri www.arxiv.org. web sunucusuna bir makale göndermişti. Çalışma Poincaré savından söz etmese de, makaleyi gören topoloji uzmanları onun savla ilgili olduğunu hemen anladılar. Bunu 2003 Martındaki ikinci bir makale izledi. O yılın Nisan ve Mayıs aylarında Perelman Amerika'daki Massachusetts Teknoloji Enstitüsü ve Stony Brook Üniversitesi'nde bu çalışma konusunda bir dizi seminer vermek için Amerika'ya gitti. Bir düzineye yakın kuruluşun önde gelen matematikçilerinden oluşan ekipler, makaleleri incelemeye başladılar. Her ayrıntının doğruluğunu inceliyor ve olası hataları arıyorlardı.

Henri Poincaré 1904 yılında üç boyutlu kürenin belirli bazı özelliklerini taşıyan herhangi bir üç boyutlu nesnenin 3-küre biçimine dönüştürülebileceğini ileri sürdü. Matematikçilerin bunu kanıtlaması için 99 yıl gerekti. ("Üç boyutlu küre", bildiğimiz anlamdaki küreden farklı.)



Perelman, Stony Brook'da iki hafta boyunca günde üç ila altı saat ders verdi, konuşmalar yaptı. Stony Brook matematikçisi Michael Anderson'un izlenimleri şöyle: "Her soruyu kesin ve açık biçimde yanıtladı. Ve şimdiye kadar ciddi kuşkular öne sürülmüş değil. İspatın tamamlanması için gereken tek şey, görece küçük bir ispat. Ama sonuçtan kimsenin pek kuşkusu yok." İlk makale temel fikirleri içeriyor; doğruluğu da kabul edilmiş durumda. İkinci makalenin içeriğiyse uygulamalar ve daha teknik görüşler içeriyor; doğrulanmışlık düzeyi, birincinin ulaştığı düzeye henüz varabilmiş değil.

Poincaré savının ispatı için 1 milyon dolar ödül konmuş durumda. Bu, Cambridge, Massachusetts'teki Clay Matematik Enstitüsü'nün 2000 yılında belirlediği yedi "Milenyum Problemi'nden biri. Perelman'ın ödülü alabilmesi için ispatın yayınlanması ve iki yıllık bir inceleme süresini başarıyla geçmesi gerekiyor. (Enstitü, çalışmanın web sitesinde yayınlanmasından sonra, sonucun başka herhangi bir makale kadar ciddi ve dikkatlice incelenmiş olduğuna da karar verebilir.)

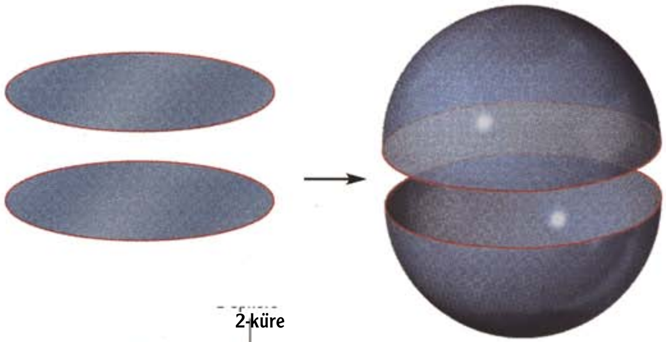
Perelman, yaptığı çalışmayla, 1990'larda Columbia Üniversitesi'nden Richard S. Hamilton'un yönettiği bir araştırma programını genişleterek tamamlamış oluyor. 2003 sonlarında Clay Enstitüsü Hamilton'un çalışmasını bir araştırma ödülüyle onayladı. Perelman'ın hesapları ve analizleri, Hamilton'un karşılaştığı ve üstesinden gelemediği birkaç engeli ortadan kaldırıyor.

Eğer ispatı herkesin de beklediği gibi doğruysa, Perelman gerçekte Poincaré savından çok daha geniş bir çalışmayı gerçekleştirmiş olacak. Şimdi Cornell Üniversitesi'nde olan William P. Thurston'un ileri sürmüş olduğu Thurston geometrikleştirme savı, olanaklı bütün 3-manifoldlar için tam bir sınıflandırma. Tekniği ve basitliğiyle inanılmaz 'güzellikteki' 3-küre, bu harikulade sınıflandırmanın dayanak noktası. Poincaré savı yanlış olsaydı -yani küre kadar "basit" başka uzaylar da varolsaydı- 3-manifoldların sınıflandırılması Thurston'un önerdiğinden sonsuz kat daha karmaşık olur-

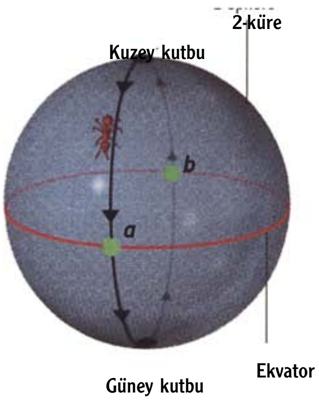
Kürelerin Çok Boyutlu Müziği

Perelman savının kalbinde yatan 3-küreyi göz önüne geirmek için biraz çaba gerekiyor. Büyük boyutlu uzaylar konusunda teoremler ispatlayan matematikçiler, buna gerek duymaz. Onlar soyut özellikler ve daha düşük boyutlarla benzetmelere ve sezgiye dayalı kavramlarla yetinirler (ama tabii benzetmelerin gerçek olmadığını unutmazlar). Ancak başkaları da, bilinen daha küçük boyutlu örneklerden yola çıkarak daha yüksek boyutlu nesnelerin neye benzedikleri hakkında fikir sahibi olabilir. 3-küre bu tür bir nesnedir.

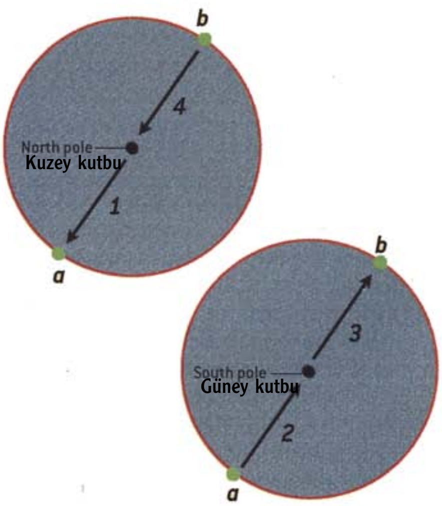
1 **Bir çemberle çevrelenmiş bir disk düşünelim. Matematikçi için disk "iki boyutlu bir top"tur; çember de "bir boyutlu bir küre". Ayrıca, bir "top", boyutu ne olursa olsun, beyzbol topu gibi içi dolu bir nesnedir. "Küre" topun yüzeyidir (balon gibi). Çember bir boyutludur; çünkü üstündeki bir konumu belirlemek için tek bir sayı yeterlidir.**



2 **Şimdi 2-boyutlu küreyi, diskin iki kopyasından elde edebiliriz. Disklerden birini kuzey yarımküreye benzer bir yarımküreye dönüştürün; öteki diski de güney yarımküreye. Sonra da bu iki yarımküreyi kenar çizgilerinden yapıştırın. İşte size 2-küre.**



3 **Bir karıncanın kuzey kutbundan yola çıkarak, uluslararası gün değişim çizgisiyle İngiltere'deki Greenwich'den geçen boylamın oluşturduğu büyük çember (solda) boyunca yürüdüğünü düşünün. Eğer bu izleği iki disk üzerine (sağda) işaret edersek karıncanın bir doğru boyunca (1) kuzey diskinin kenarına (a) yürüdüğünü görürüz. Sonra güney diskinde a'ya karşılık gelen noktaya geçer ve bu disk üzerinde bir doğru boyunca (2 ve 3) yürür. Tekrar kenara geldiğinde (b), kuzey diskine girer ve yürümeye devam ederek başlangıç noktası olan kuzey kutbuna (4) doğru yol alır. Karınca 2-küre çevresinde yürürken, izlediği yolu diskler üzerinde işaretledik. Burada, açıklanması gereken nokta, bir diskten ötekine geçtiğinde hareket yönünün ters dönmüş gibi görünmesi.**



du. Perelman ve Thurston'un sonuçlarıyla üç boyutlu uzayın alabileceği olanaklı bütün şekillerin; yani evrenimizin (zamanı değil, yalnızca uzayı ele alarak), matematiğin almasına izin verdiği bütün şekillerin eksiksiz bir kataloğuna sahibiz.

Lastik Simitler

Poincaré savını ve Perelman'ın ispatını daha derinden anlamak için topoloji konusunda bazı şeyler bilmek gerekir. Matematiğin bu dalında nesnenin tam şeklinin önemi yoktur; sanki oyun hamurundan yapılmış gibi onu istediğiniz ölçüde ezer, gerer, bükersiniz. Sanal oyun hamurundan yapılmış nesnelerle ya da uzaylarla neden ilgileniyoruz? Nedeni, bir nesnenin tam şeklinin -üzerindeki herhangi iki nokta arasındaki uzaklığın- nesnenin "geometrisi" denen yapısıyla ilgili olması. Topologlar, oyun hamurundan yapılmış bir nesneyle, onun geometrik yapısından bağımsız olan temel özelliklerini keşfederler. Topolojiyle çalışmak, insanların ortak özelliklerini bulmaya benzer; belirli herhangi bir insanın şekline girebilen bir 'oyun hamuru insanı'nı ele almak gibi. Topolojinin herhangi bir popüler anlatımını okuyanlar, bir topolog için bir fincanla bir simit arasında bir fark olmadığı yolundaki açıklamayı bilirler. Bununla anlatılmak istenen, oyun hamurundan yapılmış bir fincana, kesmeden, delik açmadan, ya da parçaları yapıştırmadan, hamuru bastırıp yuvarlayarak simit şekli verebiliyor olmanız. Öte yandan, bir topu simite dönüştürmek için ya ortasından delik açmak, ya da onu bir silindir biçiminde uzatıp iki ucu yapıştırmanız gerekir. Bu türden bir kesme ya da yapıştırma gerektirecek olan bu işlemden dolayı, top, topologlara göre bir simitle aynı şey değildir.

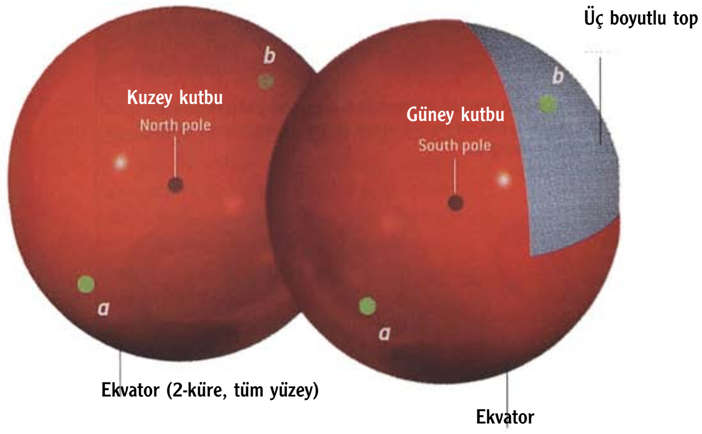
Topologları en çok ilgilendiren şey,

Kuşbakışı

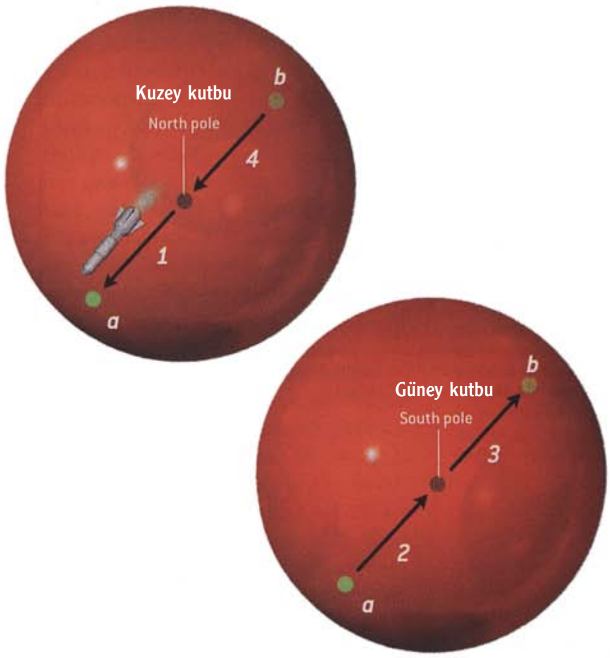
• Matematikçiler 100 yıl boyunca, Henri Poincaré'nin önerdiği, üç boyutlu küre veya 3-küre olarak bilinen bir nesneyle ilgili savı ispatlamaya çalıştılar. Sav, 3-kürenin, bütün üç boyutlu nesneler, ya da manifoldlar arasında tek olduğunu ileri sürüyor.

• Poincaré savının ispatı, sonunda genç Rus matematikçisi Grigori Perelman'dan geldi. Perelman, çalışmalarıyla, olanaklı bütün 3 boyutlu manifoldları sınıflandıran büyük bir araştırma programını da tamamlamış oluyor.

• Evrenimizin şekli 3-küre olabilir. Bununla ilgili matematiğin, parçacık fiziği ve Einstein'ın görelilik kuramıyla da ilginç bağlantıları var.



4 Şimdi 2-küreyi ve içerdiği üç boyutlu hacmi ("üç boyutlu bir top") ele alarak çember ve disk ile yaptıklarımızı top ve küreyle de yapalım: Bunların iki kopyasını alıp kenarları birbirine yapıştıralım. Topları dört boyutta, yarımküre benzeri bir şeye nasıl çarpıtabileceğimizi hayal edemeyiz; ama bu gerekmez de. Yüzeylerde (2-kürelerde) birbirine karşılık gelen noktaların, tıpkı çemberlerdeki noktalar gibi, birleştirildiğini bilmek yeterli. İki topu birleştirmenin sonucu 3-küredir; bu küre de dört boyutlu topun "yüzeyi"dir (3-küre ve 4-topun varolduğu dört boyutta, bir nesnenin "yüzeyi" üç boyutludur). Toplardan birine kuzey yarımküre, ötekine de güney yarımküre diyebiliriz. Kuzey kutbu, kuzeydeki topun merkezindedir (tıpkı kuzey kutbunun, kuzey diskinin merkezinde olduğu gibi).



5 Şimdi de bu topların, uzayın büyük boş bölgeleri olduğunu ve bir insanın da kuzey kutbundan uzay gemisiyle yola çıktığını düşünelim. Sonunda kuzey topunu çevreleyen kürenin tümü olan "ekvatora" (1) ulaşır. Ekvatorda güney yarımküreye geçer ve doğru boyunca giderek onun merkezinden (güney kutbu) yol alarak kendini ekvatorun karşı tarafında (2, 3) bulur. Orada tekrar kuzey yarımküreye geçer ve çıkış noktası olan kuzey kutbuna (4) gelir. Böylece hayalimizde dört boyutlu topun yüzeyinde hareket ederek onu çepçevre dolaşan bir kişiyi izlemiş olduk! İki topun küresel yüzeylerinin birleştirilmesinden oluşan 3-küre Poincaré savının geçerli olduğu uzaydır. Evrenimizin şekli de 3-küre olabilir.

Bu sürece devam ederek beş boyuta (4-küre yapmak için) geçebiliriz; ancak ne olup bittiğini anlamak daha da zorlaşır. Benzer şekilde iki n-topun kenar noktalarını yapıştırarak belli herhangi bir n-küreyi oluşturabiliriz. Kenarlar, ya da sınırlar (n-1)-kürelerdir; tıpkı diskin (2-top) kenarlarının bir çember (1-küre) olduğu gibi. Sonuçta (n+1)-topu çevreleyen bir n-küre elde edilir.

top ile simitin yüzeyleri; bu nedenle her iki nesnenin içini boşaltarak birer balon olduklarını düşüneceğiz. Bu durumda da topolojileri farklıdır; küresel bir balon, "tor" denen halka şeklinde bir balona dönüşemez. Öyleyse tor ve küre, topolojik bakımdan farklı şeylerdir. Başlangıçta topologlar, topolojik bakımdan farklı kaç varlık bulunduğunu ve bunları ayırt eden nitelikleri aramaya giriştiler. "Yüzey" adı da verilen iki boyutlu nesnelerin nitelikleri, açık ve kesin biçimde, yüzeyin "kulp" sayısıyla belirlenir.

19. yüzyıl sonunda matematikçiler yüzeyleri nasıl sınıflandıracaklarını bulmuşlardı. Bütün yüzeyler içinde yalnızca kürenin basit olduğunu biliyorlardı. 3-küre de, 2-küre gibi basitlik bakımından tek miydi? Bu basit sorunun ardından gelen yüz yıllık dönem, yanlış girişimler ve yanlış ispatlarla dolu.

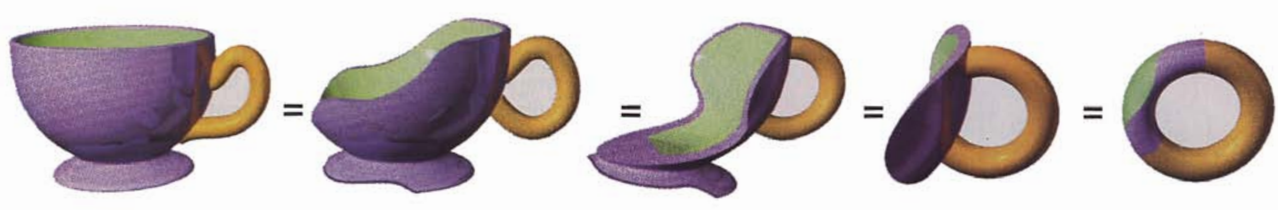
20. yüzyıla girildiğinde, en etkin çalışmaları yapan iki matematikçiden biri olan Henri Poincaré (diğeri David Hilbert) bu soruya doğrudan yaklaşmıştı. Poincaré'nin, temel ya da uygulamalı matematiğin bütün alanlarına hakim olanların sonuncusu olduğu söylenir. Matematiğin bazı alanlarını geliştirmenin yanında, gök mekaniği, elektromanyetizma kuramları ve bilim felsefesi konularına (bu konuda çok okunan birkaç kitap da yazmıştı) da katkıda bulunmuştu.

Poincaré, cebirsel topoloji denen matematik dalının başlıca yaratıcısıdır. 1900 yılı civarında bu yeni alandaki teknikleri kullanarak, bir nesnenin topolojisinin ölçütü olan ve "homotopi" adı verilen kavramı tanımladı ve geliştirdi. Bir manifoldun homotopisini saptamak için bu manifolda kapalı bir ilmek gömdüğünüzü düşünün. İlmek, manifold çevresinde olanaklı herhangi bir biçimde sarılabilir. Peki, bu ilmek, hiçbir bölümünü manifolddan kaldırmadan, yalnızca yer değiştirerek, bir noktaya sıkıştırılabilir mi? Bir simit yüzeyi için, yanıt "hayır"dır. İlmek, simitin çevresinde dolanıyorsa bir noktaya sıkıştırılamaz; simitin iç çemberinde engelle karşılaşır. Homotopi bir ilmeğin engellenebileceği farklı bütün yolların bir ölçümüdür.

Bir n-küre üstünde, ilmek ne denli eğilip bükülmüş olsa da, her zaman açılarak bir noktaya sıkıştırılabilir (bu işlemler sırasında ilmeğin kendi içinden geçmesine de izin veriliyor). Poincaré, olanaklı her ilmeğin bir noktaya büzüşebileceği yegane 3-manifoldun, 3-kürenin kendisi olduğunu ileri sürdü; ama bunu ispatlayamadı. Bu önerme, zamanla "Poincaré savı" olarak ünlendi. On-yıllar boyunca birçok kişi savı kanıtladığını bildir-

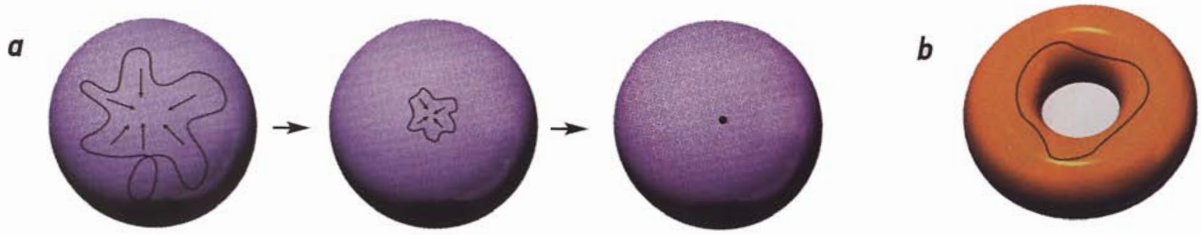
Yüzeylerin Topolojisi

Topolojide bir nesnenin tıpatıp şekli veya geometrisi önemli değildir. Sanki her şey oyun hamurundan, ya da lastikten yapılmıştır ve germe, bükme, sıkıştırma yoluyla şekillendirilebilir. Ancak, kesme ve yapıştırma yasaktır. Bu durumda topolojide, tek deliği olan en soldaki fincan, en sağdaki simite denktir.



Olanaklı bütün 2-boyutlu manifoldlar ya da yüzeyler (kompakt ve yönlendirilebilir olmak koşuluyla), bir küre alıp (a balonu gibi) ona kulplar ekleyerek yapılabilirler. Bir kulpun ilavesiyle "tür-1 yüzeyi", ya da tor oluşur. Bu, sağ üstteki simitin yüzeyidir. İki kulp ilavesiyle "tür-2 yüzeyi" (b) elde edilir.

2-küre, yüzeyler arasında benzersizdir; üzerine gömülen kapalı bir ilmek, bir nokta (a) oluncaya kadar küçültülebilir. Buna karşın tor üstündeki bir ilmek, ortadaki delik çevresinde "yakalanabilir" (b). 2-küre dışındaki her yüzeyde ilmeğin yakalanabileceği kulplar vardır. Poincaré savı, bütün üç boyutlu manifoldlar arasında 3-kürenin tek olduğunu söyler: Üstündeki herhangi bir ilmek, bir nokta oluncaya kadar küçültülebilir; ama başka herhangi bir 3-manifoldda ilmek yakalanabilir; yani bir noktaya büzüşmesi olanaksızdır.



di; ama yanıldıkları ortaya çıktı. (Burada ve daha sonraki bölümlerde açıklamayı daha anlaşılır kılmak için, karmaşık iki durumu dikkate almıyoruz: yönlendirilemeyen manifoldlar ve kenarları olan manifoldlar. Örneğin, büküldükten sonra uçları birleştirilmiş bir şerit olan Mobius şeridi yönlendirilemez. Kendisinden bir disk kesilip çıkarılmış olan bir kürenin kenarı vardır. Mobius şeridinin de kenarı vardır.)

Geometrikleştirme

Çok dikkatli incelemelere göğüs gerebilen ilk ispat, Perelman'a ait olanı. 3-boyutlu manifoldları çözümleme yaklaşımı, geometrikleştirme denen bir süreçle bağlantılıdır. Geometri bir nesnenin ya da manifoldun gerçek biçimiyle ilgilidir: geometri açısından nesne, oyun hamurundan değil, seramikten yapılmıştır. Örneğin, bir fincanın geometrisi simitinkinden farklıdır; yüzeyi farklı biçimlerde eğrileşir. Simit ve fincan (tek kulplu) topolojik bir tor'un, geometrileri farklı iki örneğidir.

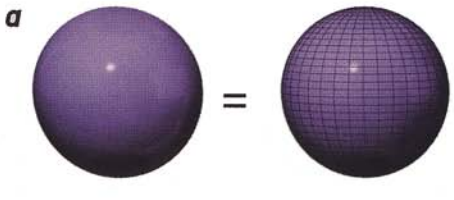
Geometrikleştirmenin Perelman'a ne anlamda yardımcı olduğunu anlamak için, geometrinin 2-manifold ya da yüzeyleri sınıflandırmada nasıl kullanılabileceğini ele alalım. Her topolojik yüzeye, eğriliğin tümüyle düzgün biçimde yayıldığı özel ve tek olan bir geometri karşılık gelir. Küre için, bu yegane geometri, kusursuzca küresel olan küredir. Topolojik küre için bir başka örnek de yumurta kabuğunun biçimi; ama kabuğun eğriliği her yerde aynı değil. Yumurtanın sivri ucu, diğer uca göre daha büyük bir eğriliğe sahip.

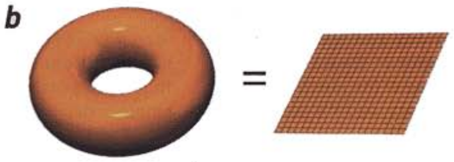
2-manifoldlar üç geometrik tip oluşturur. Küre, "pozitif eğriliğe" sahiptir, bir tümseğin tepesi gibi. Geometrikleştirilmiş simit düzdür; eğriliği düzleminki gibi sıfırdır. İki ya da daha çok kulpu olan bütün diğer manifoldların eğriliği negatiftir. Negatif eğrilik, bir dağ geçidi ya da bir eyerin eğriliğine benzer: Eyer ön-arka doğrultusunda yukarı doğru, sağ-sol doğrultusunda aşağıya doğru kıvrılır. Poincaré, Klein şişesine adını veren Felix Klein ve Paul Koebe ile 2-manifoldların bu geometrik sınıflandırılmasına, ya da geometrikleştirilmesine katkıda bulunmuştu.

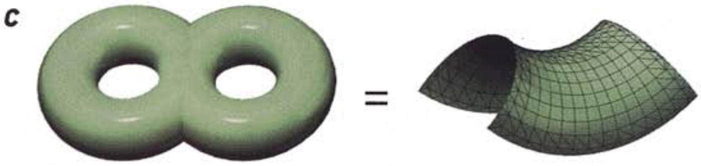
Benzer yöntemleri 3-manifoldlara uygulamaya çalışmak çok doğal. Her topo-

Geometrikleştirme

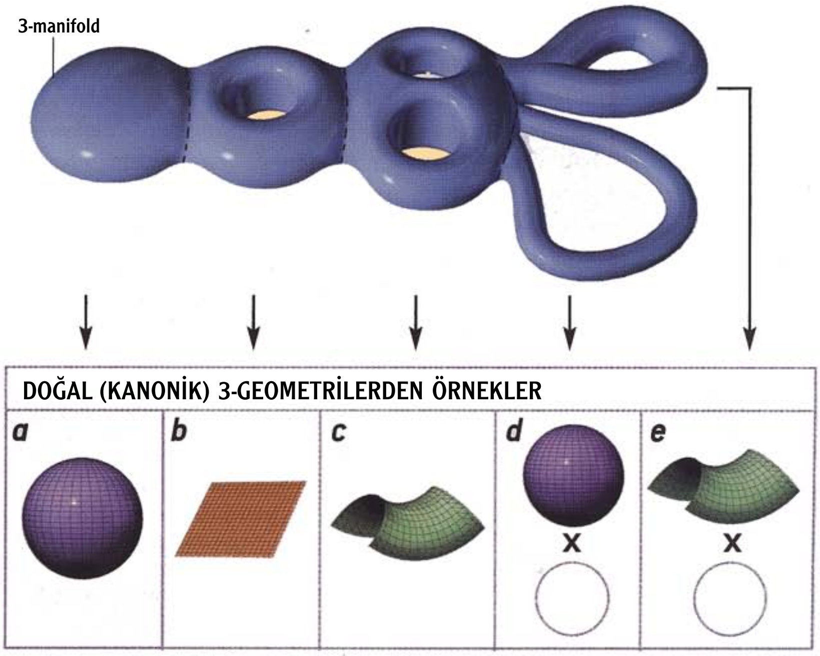
2-manifoldlar "tekbiçimleştirilerek" ya da "geometrikleştirilerek", yani onlara belirli bir geometri, ya da katı bir biçim tahsis ederek sınıflandırılabilirler. Her biri, eğriliği düzgün biçimde dağılmış bir şekle dönüşebilir. Küre (a) her noktada sabit pozitif eğriliği olan, yani her noktada bir tepenin üst bölümü gibi eğrilmiş yegane biçimdir. Tor (simit) (b) düz, yani her noktada eğriliği sıfır olan şekle getirilebilir. Bunu görmek için torun kesilip silindir şeklinde uzatıldığını düşünün. Bu durumda da silindir, boylu boyunca kesilerek bir dikdörtgen düzlem parçasına dönüştürülebilir. Tür-2 ve daha yüksek türlere (c) sabit negatif eğrilik verilebilir; kulp sayısına bağlı olarak başka ayrıntılar da vardır. Burada sabit negatif eğrilik eyer şekliyle gösterilmiştir.







3-manifoldların sınıflandırılması da 2-manifoldlarınkine benzer; ama çok daha karmaşıktır. Bu sınıflandırma, Perelman'ın çalışmasıyla tamamlanmış bulunuyor. Genel olarak, bir 3-manifoldun parçalara ayrılması, bu parçalardan her birine de, üç boyutlu sekiz doğal ("kanonik") geometriden birinin şeklinin verilebilmesi gerekir. Aşağıda verilen mavi renkli örnek (2-manifoldlar olarak art arda çizilmiş) beş tanesine denk olan geometrilerden oluşuyor: sabit pozitif (a), sıfır (b), negatif (c) eğrilikleri olan 3-geometriler, ayrıca 2-küre ile çember "çarpımı" (d) ve negatif eğriliği olan yüzeyle çember çarpımı (a).



lojik 3-manifoldu, eğriliğin manifold boyunca düzgün biçimde yayıldığı, tek bir geometriyle eşleştirmek mümkün müdür?

3-manifoldların 2-manifoldlardan çok daha karışık olduğu anlaşılıyor. 3-manifoldların çoğu tek bir geometriyle eşleşmez; her birinin, farklı bir doğal ("kanonik") geometriye sahip parçalara ayrılması gerekir. Dahası, 2-manifoldlarda olduğu gibi üç temel geometri yerine, manifold parçalarının her biri, belirlenmiş 8 doğal geometriden herhangi birinin biçimini alabilir. Bir 3-manifoldu parçalara ayırmak, bir bakıma, bir sayının tek bir şekilde asal çarpanlara ayrılmasına benzer.

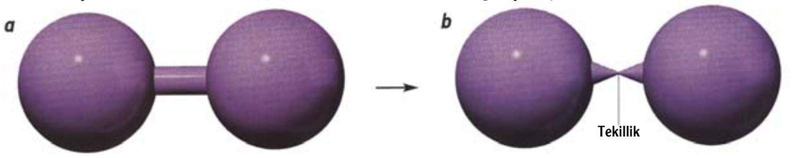
Sınıflandırma yöntemi önce 1970'lerin sonlarında Thurston tarafından önerilmişti. Meslektaşlarıyla birlikte bu savın bazı önemli bölümlerini de ispatladılar. Ne var ki, tüm sistemin dayandığı canalıcı noktalar, Poincaré savı da dahil, erimleri dışında kaldı. 3-küre tek miydi? Bu sorunun yanıtlanması ve Thurston programının tamamlanması, ancak Perelman'ın makaleleriyle mümkün oldu.

Bir manifoldu geometrikleştirmek -yani, ona her yerde tek-biçim (uniform) eğrilik vermek- için ne yapabiliriz? Bir yöntem, rasgele bir geometriyle, belki de çeşitli girinti çıkıntıları olan yumurta kabuğu biçimiyle başlamak ve sonra bütün düzensizlikleri gidermek olabilir. 1990'ların başında Hamilton, manifoldlar için böyle bir analiz programı başlattı. Matematikçi Gregorio Ricci-Curbastro'nun adıyla anılan ve sıcaklık akışını düzenleyen denklemle benzerlikleri olan Ricci akışı denklemini kullandı. Sıcak ve soğuk noktaları olan bir nesnede doğal olarak sıcaklık her yerde aynı oluncaya kadar, ısı, daha sıcak bölgelerden daha serin bölgelere akar. Ricci akış denklemi, eğrilik üzerinde benzer etki yaparak bir manifolddaki girinti çıkıntıları eşitler. Bir yumurtayla başlarsanız, yumurta yavaş yavaş kusursuz küresel biçime dönüşür.

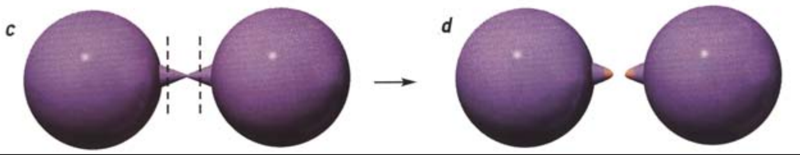
Hamilton'un analizi bir engele takıldı: Bazı durumlarda Ricci akışı manifoldun bir bölgesinde, çimdiklenmiş gibi bir noktaya sıkışıyordu. (Bu, Ricci akışının ısı akışından farklı olduğu durumlardan biri. 'Çimdiklenen' bölgeler sonsuz sıcaklığa yükselmeyi başarabilen noktalara benziyordu. Bunun bir örneği, halter biçiminde, yani ince bir boyunla birleşmiş iki küreye benzer bir manifolddu. Küreler boyun bölümünü çekerek büyür; boyun da iki taraftan, orta noktasına doğru incelir. Olası bir başka örnek, bir manifoldda ince çubuk şeklinde çıkıntı olduğunda ortaya çıkıyordu. Ricci akışı, bu durumda "puro tekilliği" adı verilen bir sorun oluşturabilirdi. Manifold bu şekilde çimdiklendiğinde "tekil" niteliğini kazanır; artık gerçek bir üç boyutlu manifold değildir. Gerçek bir üç boyutlu manifoldda, her-

Tekilliklerle Başetmek

Perelman'ın çalışmalarından önce, Poincaré savını ispatlamak ve 3-manifoldları geometrikleştirmek için Ricci akış denklemini kullanma çabaları, bir engele takılmıştı. Bir 3-manifoldun şeklini yavaş yavaş değiştiren Ricci akışı, arada "tekillikler" adı verilen sorunlarla karşılaşır. Bir örnek, halter şeklinde (bir tüple birleşen iki küre) şeklindeki manifolddur (a). Tüp, bir noktada çimdiklendiğinde manifoldun özelliklerini bozar (b). Puro tekilliği denen bir başka tekilliğin de varolabileceği düşünülüyordu.



"Ameliyat", Perelman'ın çalışmasında gösterildiği gibi, Ricci akışında ortaya çıkan tekillikler sorununu çözebilir. Manifoldun bir bölgesi çimdiklenmeye başladığında, bunun her iki tarafında küçük birer bölge kesilip çıkartılır (c); bu kesikler küçük kürelerle kapatılır ve Ricci akışı devam eder. Daha sonra başka bölgelerde de çimdik görülürse bu sürecin birkaç kez tekrarlanması gerekebilir. Perelman, bu sürecin sonunda biteceğini kanıtladı. Aynı zamanda puro tekilliklerinin de asla olmayacağını gösterdi.



hangi bir nokta çevresindeki küçük bir bölge, sıradan bir üç boyutlu uzayın küçük bir bölgesi gibi görünür; ancak çimdiklenmiş noktalarda bu özellik yoktur. İşte bu engeli ortadan kaldıracak yol, Perelman'ı beklemek zorundaydı.

Perelman ABD'ye 1992 yılında doktora sonrası öğrencisi olarak geldi. New York Üniversitesi ve Stony Brook'da birkaç yarı-yıl kaldıktan sonra Berkeley'deki California Üniversitesi'nde iki yıl geçirdi. Kısa sürede, geometrinin belirli bir dalında önemli sonuçlar ispatlayarak, parlak bir genç yıldız olarak ünlendi. Avrupa Matematik Derneği'nin ona verdiği ödülü reddetse de, Uluslararası Matematikçiler Kongresi'ne bir konferans vermesi için kendisine yapılan oldukça prestijli teklifi kabul etti. 1995 baharında, önde gelen matematik bölümlerinin kendisine yaptığı kadro tekliflerini de geri çeviren Perelman, ülkesine, St. Petersburg'a geri döndü. Amerikalı meslektaşlarından biri onun için "Kültür bakımından tam bir Rus. Materyalizmden çok uzak" demişti.

Petersburg'a döndükten sonra Perelman, matematikçilerin radar ekranlarında pek görünmez olmuştu. Yıllar sonra, eski meslektaşlarına ender olarak elektronik posta mesajları göndererek, sözgelimi İnternet'te yayımlanmış makalelerindeki hatalara dikkat çekmek dışında sesi pek çıkmadı. Kendisinin neler yaptığını soran mesajlarsa yanıtsız kalıyordu.

Nihayet 2002 sonlarında birkaç kişi ondan e-posta alabildi. Ortak matematik sunucusuna gönderdiği çalışmayı haber veriyor ve kendine özgü üslubuyla, kısaca, makaleye ilgi duyabileceklerini söylüyordu. Bu mesaj, onun Poincaré savıyla uğraştığının ilk habercisiydi. Bu ön yayımda Perelman, bağlı bulunduğu Steklov Enstitüsü dışında ABD'deki doktora sonrası pozisyonlarında biriktirdiği paranın desteğini de dile getiriyordu.

Perelman, makalesinde Ricci akışı denklemine bir terim eklemişti. Bu değişiklik, tekillik sorununu yok etmiyordu; ancak Perelman'ın 3-manifoldların analizini çok daha ileriye götürmesini sağlıyor, halter türü tekilliklerde 'ameliyat' yapılabileceğini gösteriyordu. Ameliyat yöntemiyse halterdeki ince tüpü, çimdiklenmenin başladığı noktanın iki yanından kesip, her iki taraftaki açık tüpün ağzını küre biçiminde bir kapakla kapatmaktı. Bu durumda Ricci akışı, ameliyatlı manifold ile, bir sonraki çimdiğe kadar devam eder; bu yeni çimdik için ameliyat tekrarlanır. Perelman bunun dışında, puro tekilliklerinin oluşamayacağını da gösterdi. Öyleyse, herhangi bir 3-manifold, her biri tekbiçim geometriye sahip parçaların bir topluluğuna indirgenebilirdi.

Ricci akışı ve ameliyat yöntemleri, olanaklı bütün 3-manifoldlara uygulandığında, bir 3-küre kadar 'basit' (yani, 3-küreyle aynı homotopiye sahip) herhangi bir manifold, mutlaka 3-küre gibi tekbiçim bir geometriye sahip olacaktır. Bu demektir ki, topolojik bakımdan bu manifold bir 3-küredir.


Poincaré (oturmuş ve Marie Curie ile konuşuyor) Ekim 1911'de Brüksel'deki Solvay Fizik Konferansı'na katıldı. Arkasında ayakta duranlar, Ernest Rutherford, Heike Kamerlingh Onnes (o yıl süperiletkenliği keşfetmişti) ve Albert Einstein. Bu, Einstein ve Poincaré'nin ilk ve son karşılaşmaları olabilir. Poincaré dokuz ay sonra öldü.

Perelman'ın araştırması Poincaré savını ispatlamanın ötesinde, getirdiği yeni analiz teknikleri bakımından da önemlidir. Matematikçiler onun çalışmasına dayanan çalışmalar göndermeye, ya da onun tekniklerini başka problemlere uygulamaya başladılar bile. Ayrıca, bu matematiğin fizikle de tuhaf bir bağlantısı var. Hamilton ve Perelman tarafından kullanılan Ricci akışı, renormalizasyon grubu denen ve etkileşimlerin gücünün çarpışma gücüne bağlı olarak nasıl değiştiğini belirleyen kavramla da bağlantılı. Örneğin, düşük enerjilerde elektromanyetik etkileşim 0,0073 (yaklaşık 1 / 137) sayısıyla nitelenen bir güce sahiptir. Ancak, eğer ışık hızına yakın hızda iki elektron doğrudan çarpışırsa, güç 0,0078'e daha yakın olur.

Çarpışma enerjisini artırmak, kuvveti daha kısa uzaklıklarda incelemek demektir. Bu nedenle, renormalizasyon grubu, bir süreci daha incelikli ya da kabaca izlemek için büyütmesi ayarlanabilen bir mikroskop gibidir. Benzer şekilde, Ricci akışı da, bir manifolda seçtiğiniz bir büyütme gücüyle bakmak gibidir. Bir büyütme ölçeğinde görülebilir olan girinti ve çıkıntılar bir başka ölçekte kaybolur. Fizikçiler, içinde yaşadığımız uzayın 10^{35} metre, ya da Planck uzunluğu ölçeğinde çok farklı görünebileceğini düşünüyorlar ?bir sürü ilmeği, kulpu ve başka topolojik yapıları da olan bir "köpük". Fiziksel kuvvetlerin değişimiyle ilgili matematik, manifoldların geometrikleştirilmesiyle ilgili matematiğe çok benzer.

Fizikle bir başka bağlantı da genel görelilik denklemleridir. Kütleçekim kuvvetinin işleyişini ve evrenin büyük ölçekli yapısını açıklayan bu denklemler, Ricci akışı denklemiyle yakından ilişkilidir. Dahası, Hamilton'un kullandığı temel akış denklemine Perelman'ın eklediği terim, kütleçekimin kuantum kuramı olan sicim kuramında da ortaya çıkar. Perelman'ın tekniklerinin genel görelilik ya da sicim kuramı hakkında ilginç, yeni bilgiler getirip getirmeyeceğini henüz bilmiyoruz. Eğer bu gerçekleşirse, Perelman bize soyut 3-uzayların şekli konusunda bilgi vermiş olmanın yanısıra, içinde yaşadığımız bu özel uzayın şekli konusunda da bizi aydınlatmış olacak.

Collins, G.P. "The Shapes of Space"
Scientific American, Temmuz 2004

Çeviri: Nermin Arık