

MATEMATİK PROBLEMLERİ ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

Erdogan SAKMAN

Matematik problemlerini çözebilmenin iki temel koşulu 1) bilmek ve 2) buluş yapmaktır. Bilmek, kavramları, kuralları, kuramları ve işlemleri kullanabilmek anlamındadır. Hiç bir problem bir buluş yapmadan çözülemez. Buluş önceden kararlaştırılan bir amaca ulaşmayı olanaklandıran şeydir. "Bir üçgende iki iç açının toplamı bunlara komşu olmayan dış açiya eşittir", problemdeki buluş, dış açının bulunduğu köşeden karşı kenara çizilen paralel doğrudur. Bundan sonra çözümü gerçekleştiren bilgi, iki paralel doğruyu kesen üçüncü bir doğrunun oluşturduğu açılar arasındaki ilişkilere bağlıdır.

Yalnız bilgi matematik problemlerinin çözümünü sağlayamaz. İki paralel doğruyu bir başka doğru kestiğinde hangi açılar oluştuğunu ve bunların aralarındaki ilişkileri herkes bilir veya öğrenebilir. Fakat, bir köşeden karşı kenara paralel çizmeyi akıl ederek önceden kazanılan bilgiyi kullanmak, çözüm çabalarının en önemli yönüdür. Böyle bir doğru çizileceğini akıl etmenin yolu veya yolları yok mudur?

Bu yolları bulabilmek için matematik problemlerini çözenlerin, bu çabalarında hangi ilke ve yöntemleri kullandıklarını düşünmeleri gerekir. Eğer bunlar tüm problemlere genelleştirilebilirse, buluş yapma kuralları elde edilebilir.

Verilen bir problemi çözmek için yapılacak buluş, eldeki probleme 'Bakış açısına' bağlıdır. Aynı yarı dolu şişeye bakan iki kişiden birinin şişeyi yarı dolu, diğersinin yarı boş görmesi gibi, problem çözümünü sağlayan değişik bakış açılarından örnekler verilmiştir. Buluş yapmayı sağlayarak matematik problemlerinin çözümünü olanaklandıran bu yöntemlerin genelliğini uygulayıcılar sınamalıdır. Bu hem yöntemlerin geliştirilmesine hem daha etkili olanların bulunmasına yardım edebilir.

Çözümü sağlayan buluş yöntemlerinin uygulandığı problem: 'Beş tanesi yedi lira olan yumurtalardan 56 liraya kaç yumurta alınır?' dir.

1- TANIMSAL YÖNTEM. Kavram, kural, kavram ve işlem tanımlayarak sonuca ulaşmaktır.

1.1 Ne istenmektedir? 56 liranın tamamına kaç adet yumurta alınacağını bulunması (hesaplanması) istenmektedir.

1.2 '5 tanesi 7 lira olan yumurtalardan, ne demektir? 7 liraya karşılık 5 adet verilen,' veya 'her 7 liraya 5 adet verilen,' yumurtalardan, demektir.

1.3 'her 7 liraya 5 adet verilen yumurtalar,' ne demektir? Bir adet 7 liraya 5 adet yumurta, iki adet 7 liraya 10 adet yumurta, üç adet 7 liraya 15 adet yumurta, v.b. demektir.

1.4 Her 7 liraya 5 yumurta alındığına göre, '56 liraya kaç yumurta alınır?' ne demektir? 56 liranın içindeki her 7 liraya 5 adet yumurta alınır, demektir.

1.5 '56 liranın içindeki her 7 lira,' ne demektir? 56 liranın içinde kaç adet 7 lira bulunduğu, demektir.

1.6 56 liranın içinde kaç adet 7 lira olduğunu bulmak, ne demektir? 56 lirayı 7 lira ile bölmek, ve $56/7=8$ yani 56 liranın içinde 7 lira sekiz kez bulunuyor, demektir.

1.7 O halde, her 7 lira ile 5 yumurta alınacağına göre 56 lira ile kaç yumurta alınır? Her 7 lira ile 5 yumurta alındığına ve 56 lira içinde 7 lira 8 kez bulunduğuna göre 56 liraya, $5 \times 8 = 40$ yumurta, alınır.

2. ÇÖZÜMDEN GERİLEMEK YÖNTEMİ. Sonuç biliniyor kabul edilip gerileyerek problemin verilen durumuna dönmektir.

2.1 Ne istenmektedir? 56 liraya kaç yumurta alınacağı sorulmaktadır ya da amaç, 56 liraya kaç yumurta alınacağını bulmaktır.

2.2 Sonuç (çözüm) biliniyor kabul edilir: '56 liraya (Y) adet yumurta alınır,' gibi.

2.3 Problemin Öncülleri ve Hükümü ayrılır. Öncül 1. 5 yumurta 7 lira İSE

Öncül 2. 56 liranın tamamına yumurta alınacak İSE

Hüküm 56 liraya (Y) adet yumurta alınır.

2.4 'Hükümün doğruluğu ne veya nelerin doğru olmasını gerektirir? Hükümün doğruluğu, 56 lira karşılığında (Y) adet yumurta alınmış olması, gerektirir.

2.5 'Alınan (Y) adet yumurta karşılığının 56 lira olması veya (Y) adet yumurtanın karşılığı 56 liradır, diyebilmek neyi gerektirir?' (Y) adet yumurta karşılığı 56 liradır diyebilmek için: (Y) adet yumurta ile yumurta fiyatı çarpıldığında, 56 lira bulunması gerekir.

2.6 Bir değere (sayıya) yumurta fiyatı diyebilmek, ne veya nelerin doğru olmasını gerektirir? Belli sayıdaki yumurtalara ödenecek paranın yumurta sayısına bölünmesini gerektirir.

2.7 Bu bölme işleminin yapılabildiği fiyatın bulunması neyi gerektirir? Hangi sayıdaki yumurta ya kaç para ödendiğinin, bilinmesini gerektirir.

2.8 Belli sayıdaki yumurtaya kaç lira ödendiği, bilinmekte midir? 7 lira karşılığının 5 yumurta olduğu, bilinmektedir (verilmiştir.) Yani, yumurta fiyatının $7/5$ olduğu bellidir.

2.9 O halde, hükümün doğruluğu için (Y) adet yumurta ile yumurta fiyatı çarpıldığında 56 lira bulunması gerektiğine göre, 56 liraya alınacak (Y) yumurta sayısı nedir? 56 liraya alınacak yumurta sayısı (Y) ile yumurta fiyatının çarpımı 56 olduğundan: $(7/5)(Y)=56$ veya $Y=56/(7/5)$ eşitliği yazılabilir. Bundan alınacak yumurta sayısı, 40 bulunur.

3. EŞİTİNİ BULMAK YÖNTEMİ. Bilinen veya bilinmeyen eşitlerini bularak eşitleyip sonucu elde etmektir.

3.1 Ne istenilmektedir? 56 liraya kaç yumurta alınacağı sorulmaktadır yani amaç, 56 lira karşılığında kaç yumurta alınacağını bulmaktır.

3.2 Çözüm (sonuç) biliniyor kabul edilir: '56 liranın karşılığı (Y) sayıda yumurtadır.' gibi.

3.3 Bilinmeyen iki değişik biçimde yazılır ve eşitler eşitlenir.

3.4 Bilinmeyen yumurta sayısıdır, (Y). Alınacak yumurta sayısı, ödenecek paranın, yumurta fiyatına bölümü demektir. $Y = (\text{ödenen para} / \text{yumurta fiyatı})$.

3.5 Ödenen para 56 liradır. Bunun karşılığı yumurta sayısına bölünmesi, fiyatı vermektedir. 7 liranın karşılığı da 5 yumurta olduğundan, $(7/5)$ yumurta fiyatı olacaktır.

3.6 O halde, yumurta fiyatı hem $(56/Y)$ hem $(7/5)$ bölümlerine eşittir. Eşitler de eşit olacaklarından: $7/5 = 56/Y$ yazılabilir. (Y) için çözüm yapıldığında 56 liraya 40 yumurta alınabileceği bulunur.

4. YARDIMCILAR YÖNTEMİ. Problemden veri olarak bulunan ne sonuçta istenen fakat çözümü olanaklıdır araçlardan yararlanarak sonucu elde etmektir.

Yumurta alışverişini yapanların çarpma ve bölme işlemlerini bilmedikleri varsayırsa, iki kişi karşı karşıya geçecek ve yumurtacının her 5 yumurtasına karşılık, alıcı da 7 lira koyacaktır. Bunlar, yumurta ve para yerine taş veya çöp (yardımcı) olabilir.

Satın alınan yumurta	Ödenen para
5 ₺	7 ₺
10 ₺	14 ₺
15 ₺	21 ₺

40 ₺

56 ₺

Böylece, 56 lira karşılığında 40 yumurta alınabileceği bulunmuş olur.

5. DEĞİŞTİRMEK YÖNTEMİ. Değiştirmek, problem parçalarını veya özelliklerini (nicelik, yer, konum, biçim v.b.) değiştirerek, değişmeyen ilişkiyi bulmaktır.

5.1 Birime İndirmek

1. Problemden birbiriyle ilişkili olan (biri değişince diğeri de değişen) veriler saptanır. 7 lira karşılığı 5 yumurta olduğu için para değiştiğinde (azalıp çoğaldığında) yumurta sayısı da değişecektir.

2.7 lira BİR'e indirildiğinde yani yedi kez küçültüldüğü zaman $(7/7)=1$, yumurta sayısı 5 de yedi kez küçültülecektir: $(5/7)$. Bu, bir liranın satın alınabileceği yumurta sayısıdır.

3. Problemden istenen 56 lira ile kaç yumurta alınabileceği olduğundan cevap: $(5/7)(56)=40$ yumurtadır.

4. Benzer biçimde, 5 yumurta BİR'e indirildiğinde yani beş kez küçültüldüğünde, karşılığı para yani 7 lira da beş kez küçülecektir: $(7/5)$. Bu, bir yumurtaya ödenecek paradır. Halbuki problemden ödenecek para verilmiş olduğundan karşılığı yumurta, $56/(7/5)$ işlemi sonucundan 40 bulunur.

5.2 Sıfır Yapmak

1. Problemden birbiriyle ilişkili olan (biri değişince diğeri de değişen) veriler saptanır. 7 lira karşılığı 5 yumurta olduğundan, para değiştiğinde (azalıp çoğaldığında) yumurta sayısı da değişecektir.

2.7 liranın sıfır alınması: $(7)(0)=0$, demektir. Para ödenmediği zaman yumurta alınamayacağından: $(5)(0)=0$ olur. Yani, 7 lira kaç kez küçültülmüşse, onunla ilişkili olan beş yumurta da aynı miktarda küçültülecektir.

3. Halbuki problemden 7 liranın büyütülerek 56 lira olduğu verilmiştir yani: sıfır lira ödendiğini gösteren $(7)(0)=0$ lira ilişkisi, $(7)(A)=56$ lira durumuna dönüşecektir. Buradan $A=8$, bulunur.

4. Para sekiz kez büyütüldüğünden onunla ilişkili olan yumurta da sekiz kez büyümelidir: $(5)(8)=40$ yumurta bulunur.

5.3 Genelletirmek

1. Belli bir para ile alınabileceği bilinen yumurta sayısı özel durum olarak kabul edilir. 7 lira ile 5 yumurta alınması, özel durumdur.

2. Bu özel durum, para verildiğinde alınacak yumurta sayısının bulunmasına yarayacak bir eşitlik biçiminde yazılır: $(7/7)(5)=5$ veya yazı ile $((\text{ödenen para})/7)5 = \text{alınacak yumurta}$.

3. Bu ilişki, sonucu bilinen başka bir duruma uygulanır. Örneğin, 7 liraya 5 yumurta satın alacağını bilen bir kimsenin 14 liraya 10 yumurta alınabileceğini kolayca hesaplar.

4. Bu örnek için ilk kullanılan ilişkinin geçerli olup olmadığı, ödenecek para yerine 14 ve alınacak yumurta yerine 10 sayıları konularak denir: $(14/7)(5)=10$.

5. Saptanan ilişkinin geçerli olduğu görülmektedir. Verilen problemde ödenecek para 56 ve alınacak yumurta sayısı (Y) olduğundan bunlar eşitlikte yerlerine konularak:

$$(56/7)(5)=Y$$

elde edilir ve işlem yapılarak 56 liraya 40 yumurta alınacağı bulunur.

6. BENZETMEK YÖNTEMİ. İki veri arasındaki ilişkinin başka iki veri arasındaki ilişkiye eşitliğinden yararlanarak bilinmeyi elde etmektir.

6.1 İlişki problemin verileri arasında aranır. Ya problem içindeki bir ilişkinin ya da başka bir problemdeki ilişkinin eşiti aranır.

6.2 İki büyüklük arasında ilişki kurmak, birinden diğerini elde edecek (birinden diğerine geçmeyi sağlayacak) kuralı bulmak demektir. 7 ve 56 arasında ilişki kurmak, 7 lira verildiğinde 56 lirayı elde ettiren kuralı veya 56 verildiğinde 7 liranın bulunmasını sağlayan kuralı elde etmektir.

6.3 7 lira ile 56 lira arasındaki ilişki: $(7)(8)=56$ ve 56 lira ile 7 lira arasındaki ilişki: $56/8=7$ dir.

6.4 7 liranın karşılığı 5 yumurta ve 56 liranın karşılığı da (Y) yumurta olduğundan 5 ve (Y) arasındaki ilişki, 7 ile 56 arasındaki ilişkinin benzeri olmalıdır. Başka bir deyişle 7 lira verilmişken 56 lirayı bulmak için ne kural uygulanıyorsa, 5 yumurta verilmişken (Y) yumurtayı elde etmek için de aynı kural uygulanmalıdır.

6.5 Yedi liradan 56 liraya yükselmenin kuralı, 7 lirayı sekiz ile çarpmaktır: $(7)(8)=56$. O halde, 5 yumurtayı (Y) yumurta yapmanın kuralı da, 5 sayısını 8 ile çarpmak olmalıdır: $(5)(8)=40$. Buradan 56 liraya alınacak yumurta sayısının yani bilinmeyen (Y) değerinin 40 olacağı bulunur.

7. KARŞIT BULMAK YÖNTEMİ. İsteneni değil istenmeyi bulup istenen ile ilişkilendire-

rek sonucu elde etmektir.

7.1 İstenen nedir? 56 liraya kaç yumurta alınacağıdır.

7.2 Problemde istenen bulunduktan sonra karşıtı aranır:

İstenen: Kaç yumurta alınacağı

İstenmeyen: Kaç yumurta alınmayacağı

7.3 Karşıt yorumlanır. 56 liranın alamayacağı yumurta, bir yumurtanın 56 liradan daha pahalı olduğu anlamında değildir. Çünkü 5 yumurtanın 7 lira olduğu verilmiştir. 56 liranın alamayacağı yumurta, bu para ile alınabilecek sayıdan daha fazla yumurta bulunduğu anlamındadır.

7.4 Karşıtın geçerli yorumu sayılandırılır ve/veya simgelenir: Sepetteki toplam yumurta sayısı, söz gelimi 55 ve bunların para tutarı (T) lira, gibi

7.5 Veriler kullanılır. Yumurtalardan 5 tanesi 7 lira olduğundan,

Alıcı 5 yumurta isterse, sepette

50 yumurta kalır ve bunlar (T-7) lira eder,

Alıcı 5 yumurta daha alırsa, sepette

45 yumurta kalır ve bunlar (T-14) lira eder,

Alıcı 5 yumurta daha isterse, sepette

40 yumurta kalır ve bunlar (T-21) lira eder,

Alıcı 5 yumurta daha alırsa, sepette

35 yumurta kalır ve bunlar (T-28) lira eder,

Alıcı 5 yumurta daha isterse, sepette

30 yumurta kalır ve bunlar (T-35) lira eder,

Alıcı 5 yumurta daha alırsa, sepette

25 yumurta kalır ve bunlar (T-42) lira eder,

Alıcı 5 yumurta daha alırsa, sepette

20 yumurta kalır ve bunlar (T-49) lira eder

Alıcı 5 yumurta daha alırsa, sepette

15 yumurta kalır ve bunlar (T-56) lira eder

O halde, alıcı 56 lira olan tüm parasıyla sepetteki yumurtalardan 15 adedini alamaz yani 56 liraya 40 adet yumurta alabilir.

E. SAKMAN

"İyi bir dinleyici olmak sanıldığı kadar kolay değildir." diyor yazar Jane Goodsell. "Uzun bir süre ilgilenmiş görünmek kaşları çok yorar."

Press Associates

Bir insana söz anlatmak için yakasını, paçasını tutmanıza lüzum yok. Eğer sizi dinlemek istemiyorsa, dilinizi tutun daya iyi olur.

Chesterfield