

$$(2k)^3 = 6[1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2k-1)^2] + 2k.$$

Şimdi de bir sayının 4.kuvvetini veren formülü bulalım :

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2k-1)^3 = k^2(2k^2 - 1).$$

$$2k^4 = 1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2k-1)^3 + k^4$$

$$k^4 = \frac{1}{2} [1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2k-1)^3 + k^4].$$

$$4^4 = \frac{1}{2} \cdot (1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + 4^2).$$

Gelelim bir diğer teoreme : Birbirini bir sayı farklı izleyen dört sayı alıp birbirlerine çarpın ve sonuca bir ekleyin, sonuç daima bir kare olacaktır :

$$\begin{array}{l} 1 \times 2 \times 3 \times 4 + 1 = 25 = 5^2 \\ 2 \times 3 \times 4 \times 5 + 1 = 121 = 11^2 \\ 3 \times 4 \times 5 \times 6 + 1 = 361 = 19^2 \\ 4 \times 5 \times 6 \times 7 + 1 = 841 = 29^2 \\ 5 \times 6 \times 7 \times 8 + 1 = 1681 = 41^2 \end{array}$$

$$53 \times 54 \times 55 \times 56 + 1 = 8815961 = 2969^2.$$

Birbirini iki sayı farklı izleyen dört sayı alıp birbirine çarpın ve sonuca 16 ekleyin, sonuç daima bir karedir :

$$\begin{array}{l} 2 \times 4 \times 6 \times 8 + 16 = 400 = 20^2 \\ 4 \times 6 \times 8 \times 10 + 16 = 1936 = 44^2 \\ 6 \times 8 \times 10 \times 12 + 16 = 5776 = 76^2 \\ 8 \times 10 \times 12 \times 14 + 16 = 13456 = 116^2 \end{array}$$

NAUKA-1 JIZN'den

Çeviren : Dr. Selçuk ALSAN

Not : Yukardaki yazıdan esinlenerek kendi kendime çalışarak diğer bazı formüller buldum, onları da veriyorum :

$$(1) K^3 = 2 + 4 + 6 + \dots + 2(K-1) + K$$

$$\text{Bir örnek : } 9^3 = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 9$$

$$(2) K^2 = K(K-1) + K$$

$$\text{Örnekler : } 3^2 = 3 \times 2 + 3$$

$$4^2 = 4 \times 3 + 4$$

$$(3) K^3 = K^2(K-1) + K^2$$

$$\text{Örnekler : } 3^3 = 3^2 \times 2 + 3^2$$

$$4^3 = 4^2 \times 3 + 4^2$$

Formüllerini aslında daha da geliştirebiliriz :

$$(4) K^2 = K(K-n) + n \times K$$

$$15^2 = 15 \times 10 + 5 \times 15$$

$$(5) K^3 = K^2(K-n) + n \times K^2$$

$$15^3 = 15^2 \times 10 + 5 \times 15^2$$

Formülü aslında herhangi bir üs için kullanacak şekilde geliştirebiliriz :

$$(6) K^m = K^{m-1} \times (K-n)$$

$$+ n \times K^{m-1}$$

$$\text{Örnek : } 10^6 = 10^5 \times 6 + 4 \times 10^5$$

Bir sayının katlarını toplamak onun küpünü vermektedir :

$$(7) K^3 = 2 \left[K + 2K + 3K + \dots + K(K-1) + \frac{K^2}{2} \right]$$

$$\text{Örnekler : } 7 + 14 + 21 + 28 + 35 + 42 + 49 + 42 + 35 + 28 + 21 + 14 + 7 = 7^3$$

$$5^3 = 5 + 10 + 15 + 20 + 25 + 20 + 15 + 10 + 5$$

$$(8) K^3 = K(1 + 2 + 3 + \dots + K) + K(1 + 2 + 3 + \dots + (K-1))$$

$$\text{Örnekler : } 4^3 = 4(1 + 2 + 3 + 4) + 4(1 + 2 + 3)$$

$$3^3 = 3(1 + 2 + 3) + 3(1 + 2)$$

Merak eden okuyucular için birkaç önemli formülün cebir yolu ile kanıtlanmasını veriyorum. 1'den başlayarak tek sayıları toplarsak daima bir kare çıkacağının ispatı : 1'den n'e kadar olan çift sayıların toplamı (n tek sayı

$$\text{olmak üzere) } \frac{n-1}{2} \left(\frac{n-1}{2} + 1 \right) \text{ dir. 1'den}$$

n'e kadar olan sayıların toplamı ise

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

dir. (aritmetik dizi kuralı). Bu ikisi arasındaki fark tek sayıların toplamıdır

$$\text{ve } \left(\frac{n+1}{2} \right)^2 \text{ olarak çıkmaktadır, yani bu}$$

fark daima karedir.

Tek sayıların iki kare farkı oluşu :

$$n = \left(\frac{n+1}{2} \right)^2 - \left(\frac{n-1}{2} \right)^2$$

Tek sayıların küpü :

$(2K+1)^3 - (2K+1)$ ifadesinde $a = 2K+1$ kabul edersek bu ifadeyi $a^3 - a$ olarak yazabiliriz, $a^3 - a = a(a+1)(a-1)$. a'nın yerine $2K+1$ koyarsak $2^2(2K+1)K(K+1)$ yi buluruz. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots$

$$(2K+1)K(K+1)$$

$$+ K^2 = \frac{(2K+1)K(K+1)}{6} \text{ formülünden de}$$

yararlanarak formül son şeklini alır.

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2(K-1) + K = K^2 \text{ nin ispatlanması :}$$

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2(K-1) + K =$$

$$2 \left[1 + 2 + \dots + (K-1) + \frac{K}{2} \right]$$

Parantez içindeki ifade son terimi hariç 1'den $K-1$ 'e kadar olan sayıların toplamıdır :

$$K(K-1)$$

$$\text{Yerine koyalım : } K(K-1) + K = \frac{K^2}{2}$$

K^2 bulunur.

Bir sayının katlarının toplamının küpünü verdiği kanıtlanacak :

$$K + 2K + 3K + \dots + K(K-1) + K^2 + K(K-1) + \dots + 3K + 2K + K = 2K$$

$$\left[1 + 2 + 3 + \dots + (K-1) \right] + K^2$$

1'den $K-1$ 'e kadar olan sayıların toplamı

$$K(K-1)$$

$$\frac{K(K-1)}{2} \text{ olarak yerine konursa yukarıki}$$

ifade $K^2(K-1) + K^2 = K^3$ şeklini alır.

Dr. Selçuk ALSAN