MODERN MATEMATİK NEDİR?

Erdoğan SAKMAN

Matematik nedir? Yüzyıllardır sorulan fakat doyurucu cevabı alınamayan bir soru. Aslında, 'elektrik nedir?' gibi daha nice sorular cevapsızdır ama elektrik yararlarıyla, etkileriyle vardır. Matematiği de bu açıdan görünce modern ve klasik matematik deyimlerinden söz etmek kolaylaşıyor.

Klasik, eski ya da geçmiş zamanlarda kullanılan anlamında alınırsa, modern de günümüzde geçerli olan veya uygulanandır. Bir nesne veya yaklaşımı modern yapan nedir? Modernlik, yarayışlılıktadır. Daha ucuz olan, daha az çaba gerektiren, daha sürede sonuç almayı sağlayan ya da bir sorunda değil birçoklarında kullanılabilen nesne ya da yaklaşım, moderndir. Klasik Aristo mantığı, BOOLE ve FREGE'nin değiştirdikleri bakış açısı nedeniyle iki bin yıllık duraklama evresinden çıkmış, sürekli gelişme içine girmiştir. Esir'in varlığını kabul ederek ölçülmesine zorlayan bakış açısını EİNSTEİN değiştirerek Özel ve Genel Görecelik Kuramı'nın temelini oluşturan aksiyomlara ulaşmıştır. O halde, daha genel tanımıyla modern; bugün kullanılan bakış açısıdır.

ÖKLİD geometrisinde, 'konumu belli fakat büyüklüğü olmayan' noktadır. Bu temel kavram, noktanın tanımı kabul edilince; doğru, iki nokta arasındaki en kısa yol olmaktadır. İki nokta arasını birleştiren en kısa yol doğru ise kısa olmayan yollar da vardır; kırık çizgiler, eğriler. Bunlardan geriye dönülerek nokta, iki çizginin (eğri veya doğru) kesişim yeri olarak tanımlanmaktadır. Böylece, noktadan doğru kavramı oluşturulmakta ve iki doğru veya eğrinin birbirlerine göre durumlarından yararlanılarak nokta yeniden tanımlanmaktadır. Nokta ve doğru parçası kavramları birlikte kullanılarak, üçgen kavramına geçilmektedir.

Modern matematik noktayı, bir elemanlı küme olarak tanımlıyor. Küme, en az bir özellikleri nedeniyle biraraya getirilebilen nesneler topluluğudur. Küme kuramı, klasiği modern matematikten ayıran en belirgin özelliktir. Bu kuram amaç değil araçtır yeni bir matematik dilidir. Yalnız klasik matematik eğitimi görmüş olanlara, Modern Matematik Küme Kuramıymış gibi tanıtılmaktadır. Küme Kuramını çok iyi öğrenen ama matematik bilmeyenin kimseye, yararı olmaz. Kuramın etkinliği, bir çok kavramın aynı dille belirtilebilmesidir.

Kümeler kuramını kullanan modern matematik de doğru, iki elemanlı bir kümedir. Düzlem üç elemanlı. Klasik yorumu ile, iki noktası bilinen doğrunun tüm noktaları bellidir ve üç nokta (eleman) bir düzlemi saptamaya yeter. Görülüyor ki, modern matematik 'küme' denilen yeni bir kavram geliştirerek daha üst düzeydeki kavramları türetme olanağı sağlamaktadır. Böylece, bir elemanlı kümeyi nokta kabul edip, kavramı iki kez kullanarak doğru ve doğru kavramını iki kez kullanarak düzlem hatta düzlem kavramı da iki kez kullanılarak cisim kavramı elde edilebiliyor. Bu, hem kavramları öğrenmede hem kullanmada büyük kolaylıklar sağlamaktadır.

Noktayı iki kez kullanarak doğru kavramına şöyle ulaşılabilir: doğru, bir noktayı belli bir kurala göre hareket ettirerek diğerine ulaşılırken çizilen yoldur. Yani, klasik görüşte el altında bulunan çizgilerden biri iki noktadan geçecek biçimde yerleştiriliyor ve bunlardan en kısa olanına doğru deniliyor. Modern bakış açısında noktalardan biri belli bir kurala göre hareket ettirilerek diğerine ulaşılıyor ve oluşan yol, doğru oluyor. Bu bakış açısı ya da düşünce, dün daha güç anlaşılan veya anlaşılması için daha çok zaman gereken kavramlara daha kolay ulaştırıyorsa, moderndir.

Klasik tanımıyla kare, dört kenarı ve dört açısı bir birine eşit dörtgendir veya komşu iki kenarı eşit dikdörtgendir. Alanı, kenarları çarpımıdır. Modern anlamda kare şöyle tanımlanabilir; birbirine eşit ve dik iki doğru parçasından birinin tek elemanlı kesişimi koruyarak kendi uzunluğu kadar hareketiyle oluşan şekildir. Alanı, elemanların (doğru parçalarının) büyüklükleri çarpımıdır. Modern bakış açısının getirdiği hareketlilik kavramına dayanan bu tanım klasik kare tanımından daha yararlı mıdır? Yarar, sağlanan kolaylıktır. Bu, hem daha iyi kavrama, daha az kavrama dayanma hem daha genel olma yani başka kavramları da kapsama anlamındadır. Nedir bu kapsam?

Karenin alanı, onu oluşturan elemanların çarpımı olarak, tanımlanıyor. Dikkat edilirse, (a) kenarı büyüklüğünü, sonuçta (hareket durduğu zaman) değiştirmiyor ve hareket yüksekliği de aynı kalıyor. O halde, üç öge söz konusudur :

1) şekli üreten doğrunun uzunluğu,
2) Şekli üreten doğrunun hareket sonrası uzunluğu,
3) Hareket yüksekliği.

Karenin alanı (a^2) olduğuna göre, öğeler bu sonucu verecek biçimde ilişkilendirilebilir :

hareket ilk
Alan = (yüksekliği) [(büyüklük) +

son
(büyüklük)] / 2

veya Alan = (a) [(a) + (a)] / 2 = a^2.

Bu temel kavramı (kare alanının hangi bakış açısına dayanılarak a^2 bulunduğu) öğrenen kişinin artık üçgen, yamuk dikdörtgen ve paralelkenar gibi şekillerin alan formüllerini ayrı ayrı ezberlemesi gerekmemektedir. Çünkü, hareket kavramını uygulayarak ulaşılan genel sonucu kullanabilir.

Dikdörtgen oluşurken, (a) ile başlanmakta ve hareket (a) ile sonuçlanmaktadır. Hareket yüksekliği de (b) dir. Böylece, h = b, alınarak, Alan = (b) [(a) + (a)] / 2 = ab, bulunur.

Üçgen oluşurken, (a) ile başlanmakta ve tepede a = 0 olmaktadır fakat hareket yüksekliği (h) dır. O halde,

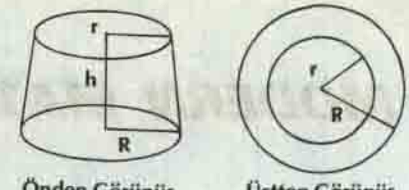
Alan = (h) [(a) + (0)] / 2 = ah/2, olur.

Yamuk söz konusu olduğunda, (a) ile başlanmakta ve hareket farklı bir büyüklükte (b), durmaktadır ve hareketin yüksekliği de (h) dır. Buna göre,

Alan = (h) [(a) + (b)] / 2
= h (a + b) / 2, dir.

Ayrı gibi görünen şekil ve cisimlerin aynı kavrama göre ele alınmalarının (aynı bakış açısından görülmelerinin) modern matematiğin en yararlı yönü olduğu daha şaşırtıcı örneklerle de gösterilebilir. Kesik koninin yanal yüzeyi :

$\pi (R + r) \sqrt{(R - r)^2 + h^2}$, dir.



Önden Görünüş Üstten Görünüş

Modern matematik, kesik koniyi (R) yarıçaplı çemberin kendisine paralel olarak (h) kadar yükseltilip, taban yarıçapının (r) ye dönüştürülmüşü olarak görmektedir. (R) yarıçapı küçültülmeden çember hareket ettirilirse, R = r olacak ve oluşan silindirin yanal yüzeyi

$\pi (R + r) \sqrt{(R - r)^2 + h^2}$ de R = r, alınarak :

$2 \pi R h$, bulunacaktır.

(R) yarıçapı sıfır oluncaya kadar çember küçültülürse, r = 0 da hareket duracağından : $\pi R \sqrt{R^2 + h^2}$, elde edilir. r = 0 alınması bir koniyi tanımlar dolayısıyla varılan sonuç koninin yanal yüzeyidir.

Yarıçapların sabit kaldığı fakat düzlemden yükselme olmadığı varsayılırsa, h = 0 dır. Buradan, $\pi (R^2 - r^2)$ elde edilir ki bu bir halkanın alanıdır.

Eğer, r = 0 ve h = 0, alınırsa ; πR^2 sonucu elde edilir. Bu, dairenin alanıdır.

Nokta veya alanları hareket ettirme kavramına dayalı bakış açısının konuları nasıl birbiriyle ilişkilendirerek az kavramla çok nesneyi tanımak ve anlamak olanağı sağladığı görülmektedir. Modern matematik kavramlarındaki genelliğe dolayısıyla uygulama kapsamının genişliğine geometrik örnekler verilmesi, anlatımda kolaylık sağlamak içindir. Benzeri örnekler aritmetik ve cebirden alınabilir.

Klasik matematikteki en büyük güçlük, çözüme yarayışlı bakış açıları sağlamamasıdır. Çünkü modern veya klasik görüşlerde olsun bütün matematik problemleri hem bilgi hem buluş gerektirirler. Bir üçgende, 'iki içaçının toplamı bunlara komşu olmayan dışaçıya eşittir,' teoremini öğretmen, üçgenin tepesinden tabanına paralel bir doğru çizerek oluşturduğu yöndeş ve içters açıların eşitliğinden yararlanarak göstermektedir. Fakat, öğrencilerden biri, 'tabana paralel bir doğrunun nasıl akıl edildiğini,' sorarsa, ne cevap verecektir ? Acaba, tek çözüm yolu bu buluşa mı dayanmaktadır ? Sorunun cevapsız kalışının nedeni, problemin amaç durumunun (çözüm) verilen durumun bir dönüşümü olduğunun görülmemesidir. Böylece, öğrenci her problemde, neye dayandığı bilinmeyen yeni bir buluş yapmak güçlüğü ile karşı karşıyadır. Ve matematik ürküntünün de nedeni budur.

Üçgenin içaçıları probleminde, tepeden tabana paralel bir doğru çizme buluşunu yapmak, B ve C açılarıyla içters ve yöndeş açılar oluşacağı bilgisine dayanmaktadır. Fakat, bunun çözüme yarayacağı nasıl akıl edilecek, çeşitli bilgiler arasından nasıl ve neye dayanılarak seçilecektir? Doğruyu noktanın veya düzlemi doğrunun hareketiyle elde eden modern yaklaşım temel düşünce olan 'hareket ettirmeyi' kullanarak bu buluşun yapılmasını da sağlamaktadır. Hareket ettirmek verilen bir durumdan amaçlanan bir duruma belli bir kural ya da kurallar dizisi uygulayarak oluşmaktır. Kural olmazsa, hareket rasgele olur. Rasgele oluşumlarda düzenti (pattern) yoktur. Halbuki, matematiğin konusu, düzentinin kendi içindeki ve diğer düzentiler arasındaki ilişkilerin kurallarıdır. Hareketi sağlayan yani değişmeyi olanaklandıran, bir nesne veya durumun özelliğini (yer, en, boy, renk, nitelik, yükseklik, açı, v.b.) veya özelliklerini küçültmek veya büyültmektir.

Üçgenin içaçıları probleminde, örneğin B açısı küçültüldüğünde (küçülme B köşesini BC üzerinde çok uzağa götürerek yani sonsuza atarak yapılabilir) yani B köşesi C den sonsuz uzakta olduğunda, B açısı sıfıra çok yakın ve AB kenarı da BC kenarına paralel olur. Bunun sonucu, C = A' dür. (A', A köşesindeki dışaçıdır). B açısı da sıfır olduğundan A' = B + C, elde edilir. Gerçi bu, iki içaçı toplamının komşu olmayan dış açıya eşitliği için yeterli değildir ama A' dışaçısı içinde C açısı oluşturulacağını gösterir. Bunu gerçekleştirmenin yolu, A tepesinden BC tabanına paralel çizmektir. Bu nedeni kavrayan öğrenci, söz konusu paralelin nasıl akıl edildiğini sormaz.

Elde edilen genel kurallar, bir şekilden diğerlerine ve bir cisimden diğer cisim ve şekillere dönüşüm formülleridir. Dönüşüm, iki ayrı algılamayı birbiriyle ilişkilendirir ve belli bir kuralla birinden diğerine geçişi sağlar. Kesik koniye önden bakarak edinilen izlenim bir bakış açısı ve üstten bakarak onu iç içe çemberler olarak görmek bir başka bakış açısıdır. İşte farklı bakış açılarını (değişik görünüşleri) temel bir kavrama dayıyarak (değişmeyeni bularak) ilişkiyi saptamak yani birinden diğerine geçişin kuralını bulmak, matematiğin temel ve modern işlevidir.

Birinci sırada bir, ikincide iki, üçüncüde üç ve dördüncü sırasında dört topun birbirlerine değecek biçimde dizilişini yalnız üç topun yerini değiştirerek ters çevirmeyi deneyiniz. Göreceksiniz ki çözüm, verilen ve amaç durumlarda değişmeyeni bulmaktadır. Değişmeyen, her iki şeklin ortasında çiçek biçiminde dizili yedi toptur.

Verilen bir üçgen içine tabanı üçgenin tabanı ile çakışan fakat diğer iki köşesi üçgenin kenarları üzerinde olan bir kare çizmeyi deneyiniz. Değişmeyen ilişkiyi bulmadan çözümün elde edilemeyeceğini göreceksiniz.

Modern anlayışla matematiği, verilen bir düzentiden diğerine geçme çabası olarak tanımlamak yalnız matematiği anlamayı ve kullanmayı kolaylaştırmakla kalmamakta, genelliği nedeniyle diğer alanlarda da yararlı olmaktadır. Balıkla insan ayrı görünen cisimlerdir ama Evrim Kuramı bu iki durumun birbirine nasıl dönüştüğü kurallarını, hiç değilse şimdilik biçimsel olarak, vermektedir. Bir bardak su içmek; su, bardak ve insan verilerinin kimi kurallar kullanılarak, amaç duruma dönüştürülmesi değil midir?

Canlıların ve makinelerin tüm faaliyetleri, dönüşüm olarak görülebilir. Yani uygun verilere kimi kurallar uygulanarak saptanan sonuç elde edilebilir ki bu Yönbilimin (Sibernetik)) çıkış noktasıdır. Bu dönüştürme işlemleri, modern matematiğin bugün kabul ettiği Kümeler Kuram ve dili ile kendi konularına yararlı bir biçimde uygulanmaktadır. Bu nedenle, modernlik kümeler kuramı ile tamamen örtülü olmakla birlikte kimi yeni konuları da içermektedir.

Modern matematiğin önemli kavramlarından biri (hareket) üzerinde çeşitli örneklerle durulmasının nedeni modernliğin; genellik, uygulama alanı genişliği ve buluşlara olanak sağlama anlamını vurgulamak içindir. Yoksa, eskiden ders kitaplarında bulunmayan yeni bir konunun bugünkü ihtiyaçlar nedeniyle programlara alınmış olması, modernliğin doğal bir sonucudur.

Yeni bakış açılarının uygulama alanını ne kadar genişlettiğine matematiğin kendi içinden sayısız örnekler verilebilir ama matematik dışı örnekler kavramların önemini daha belirgin duruma getirmektedir

Yukarıda sürekli sözü edilen ve hareketliliğe dayanan dönüştürme kavramı, edebiyata da bir bakış açısı oluşturabilir. Ömer SEYFETTİN, Nâdan adlı öyküsüne şu deyişle başlıyor 'Nâdan ile sohbet güçtür bilene, Nâdan ne gelirse söyler diline (Nâdan, terbiyesiz, ne söylediğini ne yaptığını bilmeyen kişidir).' Bunu, öyküsü içinde; Nâdan ile sohbet âkile cehennem ateşinde yanmaktan beterdir,' biçiminde açıyor. Öyküde Padişah, ölümden bile korkmayan Köse Vezir'e sadrazamlık teklif ediyor. Ülkeyi içinde bulunduğu bunalımdan kurtaracak en uygun kişi gördüğü için. Vezir, öneriyi geri çevirince, bir Nâdan ile kapattırıp ölümden beter duruma gelip teklifi kabul etmesini sağlamak istiyor. Sonuçta, Köse Vezir teklifi kabul ediyor ama nedenini (çözüm dayanağını) şöyle açıklıyor: 'Zavallı Nâdan'ın benim yüzümden kapatılmasına acıdığımdan mühr-i hümayunu (Padişah'ın mühürü) aldım.' Bu öyküde yazar 'Nâdan ile kapatılan cehennem ateşinde yanmaktan beter olur' verilen durumunu (yaygın kanısını), 'Nâdan ile kapatılan ona acır,' biçimine dönüştürmekte ve bu dönüşüm nedeniyle Padişah'ın sorunu çözülmektedir. O halde, dönüştürmek modern kavramı edebiyatta da geçerlidir ve bir durumdan diğerine geçmeyi yani amaca ulaşmayı ya da çözümü sağlamaktadır. Peki ama dönüşümün bir kuralı olacaktı, burada dönüşümü yaptıran kural nedir? İki insan arasında çeşitli ilişkiler söz konusudur. Biraraya gelince, kavga ederler, tartışırlar, nefret ederler, sevgi veya acıma duyarlar veya biri cehennem ateşinde yanmaktan beter olur. SEYFETTİN, 'cehennem ateşinde yanmaktan beter olur' ilişkisi yerine eşitini (her ikisi de ilişki olduklarından eşit) koyarak yani 'acıma duyar' ile değiştirerek, dönüşümü sağlamaktadır. Başka bir deyişle, dönüşümü sağlayan 'bir şey yerine eşitini' kullanmaktır.

O halde, matematiğin modernliği, günümüz ihtiyaçlarına uygun konuları içermesi ve işlemler yapılabilen genel bir dil kullanması yanında eski ve yeni konuları, daha genel ve uygulama alanı daha geniş kavramlarla ele almasındadır. Matematiğin gün geçtikçe soyutlaştığı doğrudur. Fakat, daha genel kavramlar kullanmadan bir matematikçinin bile ömrünün yetmeyeceği konuları anlamak ve anlatmak başka nasıl sağlanabilir?

Matematik problemlerini çözmedeki güçlük, günlük yaşamın gerektirdiği kararlarda koşulları ve olanakları değişik olgu ve bireyleri örnek alma sonucu uğranılan başarısızlık, genel ilkeleri kullanmamak veya kullanabilecek kadar genelleştirmemiş olmak ya da yanlış uygulamaktan kaynaklanmaktadır. Genel bir matematik kavramını yanlış uygulamanın toplumu ve görevlileri nasıl çaresiz ve gülünç duruma düşürdüğünü Aziz NESİN, 'Damda Deli Var' öyküsünde şöyle sergilemektedir: Dama çıkan delinin isteğine uyarak toplum ve görevliler ona çok yüce ünvanlar vermelerine karşın aşağıya indirememektedirler. Toplumun ve görevlilerin kullandığı yaklaşım: 'Seni muhtar (ve sırayla belediye meclisi üyesi Belediye Başkanı, Bakan, Başbakan ve İmparator) yaptık! Hadi in aşağı!'dır. Aralarında bulunan yaşlı bir politikacı deliye verilen en yüce ünvanı koruyarak: 'Beşinci (sırayla dördüncü, üçüncü, ikinci, birinci) kata çıkmak arzu buyururlar mı?' yaklaşımını kullanıp, deliyi indirmektedir. Peki ama bu yaklaşımın matematik kavramlarıyla ilişkisi nedir? Öyküde, matematik kavramlara dayalı bir çözüm mü vardır? Matematikte bir şeyin ölçüsü (A) ise o şey (A) dan küçük olamaz yani hem $A = B$ hem $A < B$ değildir. Benzer biçimde, (Deli - İmparator), toplumun kendi isteğidir. Halbuki, (İmparator $>$ toplum) olduğundan deliye, 'İn aşağıya,' demek yani (Deli $<$ toplum ve görevliler), ilk varsayımla çelişkilidir. Yaşlı politikacı bu çelişkiye düşmediği için, çözümü elde etmektedir. Öyküde buluş olan çözüm, matematiğin 'bir şey kendinden küçük olamaz' kavramı uygulanarak elde edilmektedir.

Bu ustalığı kazanmanın en kısa yolu (tek yolu değil) matematiktir. Matematiğin edebiyata bile girip buluşlara temel olması özellikle günlük yaşamın çeşitli sorunlarının çözümünde kullanılması daha genel kavramların geliştirilmesine bağlıdır. Bu nedenle, yarının matematiği, yaşam ile arasındaki boşluğun, genç kuşağın yaratıcı çabalarıyla, doldurulmasını beklemektedir.

- *Düşünce rüzgâr, bilgi, yelken, insanlıkta kayığın kendisidir.* — W. HARE
- *Düşünüyorum öyle ise varım.* — DESCARTES
- *Yeterli düşünmemektense hiç düşünmemek daha iyidir.* — T. BERNARD
- *Düşünmek ruhun kendi kendine konuşmasıdır.* — EFLATUN